



Identification des conditions aux limites pour les equations de Saint-Venant

L. Reinhart

► To cite this version:

L. Reinhart. Identification des conditions aux limites pour les equations de Saint-Venant. RR-0458, INRIA. 1985. inria-00076096

HAL Id: inria-00076096

<https://inria.hal.science/inria-00076096>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 458

**IDENTIFICATION
DES CONDITIONS AUX LIMITES
POUR LES ÉQUATIONS
DE SAINT - VENANT**

Laure REINHART

Novembre 1985

IDENTIFICATION DES CONDITIONS AUX LIMITES POUR LES EQUATIONS DE SAINT-VENANT

L. REINHART

Abstract:

The solution of the inverse problem for the boundary conditions in the Saint-Venant equations is a main care for real problems for which these quantities are unknown a priori. This problem is solved by the Optimal Control techniques and Conjugate Gradient method leading to delicate gradient computations. A great number of numerical tests give a first answer to the questions of optimal captors position and number to reach the best convergence of the algorithm.

Résumé:

Dans les conditions d'application maritime réelle, les conditions aux limites sont inconnues. La résolution du problème inverse concernant ces quantités utilise les techniques du Contrôle Optimal et la méthode du Gradient Conjugué, pour laquelle la principale difficulté consiste dans le calcul du gradient de la fonctionnelle d'évaluation entre les quantités calculées et observées. Les nombreux tests numériques effectués permettent de déterminer la position et le nombre optimal de capteurs pour assurer la meilleure convergence de l'algorithme.

Ce travail a été mené en collaboration avec le Laboratoire National d'Hydraulique (EDF DER Chatou) dans le cadre d'une convention d'étude financée en partie par le LNH.



PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLÉ

1. Rappel des objectifs

Les équations de St Venant modélisent les écoulements bidimensionnels en eaux peu profondes ; elles sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles intégrées sur la composante verticale et dans lesquelles on a supposé que la répartition verticale de la pression était hydrostatique [1].

Si on note $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1,2}$ la vitesse moyenne du courant sur une verticale, h le tirant d'eau, z la cote de la surface libre et Q le courant de masse ($Q = uh$), les équations de St Venant sont décrites d'une part par la loi de conservation (dérivée de la condition d'incompressibilité) et d'autre part, par l'équation des moments sous la forme :

$$(1) \quad \partial h / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0$$

$$(2) \quad \partial Q_i / \partial t + \nabla \cdot (Q_i \mathbf{u}) + gh \partial z / \partial x_i - K \Delta Q_i = S_i, \quad i = 1, 2,$$

où K représente le coefficient de diffusion,

g est l'accélération de la pesanteur,

et \mathbf{S} dépendant éventuellement de la vitesse \mathbf{u} , tiend compte des forces extérieures (frottement, force de Coriolis, contraintes dues au vent, termes sources éventuelles).

Pour résoudre numériquement ce problème, on se donne d'une part des conditions initiales et d'autre part des conditions aux limites à la frontière du domaine d'étude borné en espace. Ces conditions aux limites peuvent être de plusieurs types dont principalement :

- (3.a) débit imposé sur une partie de la frontière (conditions de type DIRICHLET)
- (3.b) dérivée normale du débit imposée (conditions de type NEUMANN)
- (3.c) condition d'onde incidente (combinaison linéaire des valeurs

- (3.d) du débit, de la dérivée normale du débit et de la cote de la surface libre imposée sur la partie maritime de la frontière) [2]
conditions de glissement le long de la frontière terrestre [3]

La résolution numérique de ce problème (construction de la solution du problème (1)-(2) à partir des conditions initiales, conditions aux limites et coefficients physiques), appelé problème direct a fait l'objet d'un précédent contrat [4]-[5]. Cette étude a permis de montrer qu'il était possible pour chaque type de conditions aux limites énumérées ci dessus, de décomposer le problème global en sous problèmes linéaires ne portant que sur une des composantes du débit à la fois ou sur la hauteur d'eau. Le traitement des termes convectifs et des termes liés à la propagation diffusion est découplé par l'utilisation d'une discrétisation semi-implicite en temps et par une méthode de pas fractionnaires [6]-[7]. Les équations de propagation-diffusion sont découplées par une méthode de décomposition quasi-directe introduite par R. GLOWINSKI et O. PIRONNEAU [8] pour les équations de Navier Stokes (cf aussi [9]-[10]-[11]). L'étape de convection est linéarisée et résolue par une méthode de caractéristiques [12]-[13].

Le problème qui se pose dans le présent contrat est celui de l'étalonnage du modèle (1)-(2) dans des conditions d'application maritime réelle ; c'est à dire la recherche des conditions aux limites sur les frontières maritimes, la recherche des conditions initiales et celle des coefficients physiques pour qu'à géométrie donnée, le modèle (1)-(2) redonne en certains points des résultats prédéfinis en cote et /ou débit.. L'étude de cet étalonnage comporte plusieurs aspects complémentaires. Tout d'abord, il est nécessaire de définir et de mettre au point une technique d'identification ; nous avons choisi d'étudier, dans ce sens, la méthode de controle optimal sur l'écart quadratique entre la solution du problème direct et les observations aux points de mesure. La méthode générale associée à ce problème est décrite au paragraphe 2 et appliquée au problème de diffusion propagation au paragraphe 3. On essaiera de détacher des résultats numériques une méthode pour rechercher la position et le nombre optimaux de capteurs pour assurer une bonne convergence de la méthode vers la solution attendue. Dans ce même esprit, on déduit des notions de conditionnement du problème d'identification en fonction de la position et du nombre de capteurs.

2. Méthode de controle pour les problèmes d'identification

2.1. Généralités

On se place dans le cadre des travaux de J.L. LIONS [14] et G. CHAVENT [15]. Soient U et Y deux espaces de Banach, où U représente l'espace des contrôles et Y l'espace des états. On se donne une application F de Y dans U ayant les propriétés suivantes :

- (4.a) $F : Y \rightarrow U$ est de classe C^k de U dans Y ,
- (4.b) $\forall u \in U$, l'équation $F(y) = u$ admet une unique solution dans Y ,
- (4.c) $\forall y \in Y$, $\partial F / \partial y (y)$ est un isomorphisme de Y dans U .

Le théorème de la fonction inverse s'applique et on peut définir la fonction ϕ par :

$$(5) \quad \begin{aligned} \phi : U &\rightarrow Y, \\ u &\rightarrow \phi(u), \end{aligned}$$

vérifiant :

- (6.a) $\phi(F(y)) = y, \forall y \in Y$,
- (6.b) ϕ est de classe C^k de U dans Y ,
- (6.c) $\phi'(u) = (\partial F / \partial y (\phi(u)))^{-1}$.

On se donne de plus l'espace de Hilbert H des observations et on note :

- (7.a) $\|\cdot\|_H$ norme sur l'espace H ,
- (7.b) $(\cdot, \cdot)_H$ produit scalaire sur H ,
- (7.c) Λ_H l'isomorphisme canonique de H sur son dual H' :

Soit z_d une observation, $z_d \in H$; à tout contrôle u dans U , on associe l'observation $z(u)$ tel que :

$$(8) \quad z(u) = C y(u),$$

où $C \in L(Y, H)$, et le coût

$$(9) \quad J(u) = 1/2 \|C(y(u)) - z_d\|_H^2.$$

Si U_{ad} est une partie convexe fermée de U , le problème de contrôle est alors :

$$(10) \quad \text{Trouver } u \in U_{ad}, \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

Remarque 1 Si la fonction ϕ est une fonction affine de U dans Y et si U_{ad} est borné, il existe un sous-ensemble X de U_{ad} non vide tel que :

$$(11) \quad J(u) = \inf J(v), \quad \forall u \in X.$$

L'ensemble X est fermé convexe ; il est appelé ensemble des contrôles optimaux. (cf LIONS [14] p 51-52).

Remarque 2 Si on ajoute un terme coercif à la fonctionnelle J , de la forme

$$(12) \quad J(u) = J(u) + (Nu, u)_U,$$

où $N \in L(U, U)$ est symétrique défini positif, l'ensemble X défini à la remarque 1 est réduit à un point ; on a donc unicité de la solution.

Remarque 3 Dans le cas "non linéaire", (ie ϕ est non affine) les conditions d'existence et / ou d'unicité doivent faire l'objet d'étude spécifique dans chaque cas particulier. (Cf LIONS [16]).

Theoreme 1 La fonctionnelle J définie en (9) est dérivable et sa dérivée $J'(u)$ en un point u de U s'écrit :

$$(13) \quad \forall v \in U, \quad J'(u).v = (\partial F / \partial u (y(u)).v, p)_{Y, Y'}$$

où $y(u)$ est la solution du *problème direct* $F(y) = u$,
et p est la solution du *problème adjoint*

$$(14) \quad (\partial F / \partial u)^* p = -C'(y)^* \Lambda_H(C(y(u)) - z_d),$$

où de façon générale, si $L \in \mathcal{L}(v, w)$, $L^* \in \mathcal{L}(w', v')$ désigne l'adjoint de L .

Preuve du théorème 1 :

En dérivant l'expression de J en (9) par rapport à u , il vient :

$$\begin{aligned} J'(u).v &= (C'(y).v, C(y) - z_d)_H \\ &= (C'(y)v, \Lambda_H(C(y) - z_d))_{H, H'} \\ &= (v, C'(y)^* \Lambda_H(C(y) - z_d))_{Y, Y}; \end{aligned}$$

En utilisant alors l'équation (14), on obtient :

$$J'(u).v = (v, (\partial F / \partial u)^* p) = (\partial F / \partial u . v, p).$$

Remarque 4 : Dans les cas d'observations ponctuelles, l'espace H se réduit à un espace de dimension finie et l'opérateur C est égal à la somme de masse de Dirac δ_b définie par :

$$\begin{aligned} (15) \quad \delta_b : C^* &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \delta_b y &= y(b). \end{aligned}$$

L'utilisation de formulation variationnelle évite le calcul de C^* .

2.2. Application à un cas simple

On se propose d'identifier les conditions aux limites de type Dirichlet pour le problème du Laplacien. Soit Ω un domaine de \mathfrak{R}^2 , borné, et de frontière Γ lipschitzienne. On se donne un ensemble S de points de Ω

$$(16) \quad S = \bigcup_{i=1}^{N_{obs}} \{x_i\},$$

et les observations $O = U \sum_{i=1}^{Nobs} \{z_i\}$ aux points de S . Le problème consiste

à trouver dans $L^2(\Gamma)$, la fonction g qui minimise la fonctionnelle cout $J(g)$ définie par :

$$(17) \quad J(g) = 1/2 \sum_{i=1}^{Nobs} \{u(x_i) - z_i\}^2,$$

où u est obtenue, en fonction de g , en résolvant le problème :

$$(18) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \\ -\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g, \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Sous forme variationnelle, le problème (18) s'écrit aussi :

$$(19) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } H^1(\Omega), \text{ tel que :} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \\ \text{et } u = g \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

A toute "perturbation" h de g , on associe la solution du problème linéarisé :

$$(20) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \delta u(h) \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla \delta u(h) \cdot \nabla v \, dx = 0 \\ \delta u(h) = h \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le gradient de J au point g , appliqué à h s'écrit alors :

$$J'(g).h = \sum_{i=1}^{Nobs} (u(x_i) - z_i) \cdot \delta u(h)(x_i).$$

Dans ce cas particulier et avec les notations du paragraphe 2.1,

l'application ϕ est l'application qui associe, à tout élément g de $H^{1/2}(\Gamma)$, la solution du problème (19). Sa dérivée au sens de Fréchet est l'opérateur qui à tout élément h de $H^{1/2}(\Gamma)$, associe la solution du problème "linéarisé" (20). On pose :

$$(21) \quad \begin{cases} U = H^{1/2}(\Gamma), \\ Y = H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

alors $\forall z \in H^1_0(\Omega)$ on a :

$$(\partial F / \partial y \cdot z, p) = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla p \, dx = ((\partial F / \partial y)^* p, z).$$

Le problème adjoint s'écrit donc : (cf(14))

Trouver p dans $H^1_0(\Omega)$ tel que, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, dx = \sum_{i=1}^{Nobs} (u(x_i) - z_i) v(x_i),$$

et l'expression du gradient devient :

$$(22) \quad J'(g).h = \int_{\Omega} \nabla h' \cdot \nabla p \, dx,$$

où h' est un relèvement dans $H^1(\Omega)$ de la fonction h de $H^{1/2}(\Gamma)$.

Remarque 5 : Le calcul de l'expression du problème adjoint s'obtient donc en dérivant l'expression du problème direct par rapport à g et en utilisant une formule d'intégration par partie. Ce sont ces concepts simples que nous utiliserons dans les cas plus difficiles.

2.3. Méthodes de gradient conjugué pour la résolution du problème d'identification.

Lorsque l'espace des contrôles est un espace vectoriel (optimisation sans contraintes), on peut résoudre le problème de minimisation par une méthode de gradient conjugué [17]. La version POLAK-RIBIERE de cet algorithme s'écrit :

Etape 1 Initialisation

- (23) Soit u^* dans $H^{1/2}(\Gamma)$,
On résout le problème $F(y^*) = u^*$, et on évalue l'observation $C(y^*)$ et la fonctionnelle (9), $J(u^*)$.
- (24) Résolution du problème adjoint (14)
Trouver p^* dans Y solution de :
 $(\partial F / \partial y(y^*))^* p^* = -C'(y^*)^* \Lambda_H(C(y^*) - z_d),$
- (25) Evaluation du gradient en u^* :
 $J'(u^*).v = (\partial F / \partial u(y^*).v, p^*).$
- (26) On pose $d^* = J'(u^*)$ (Première direction de descente)

Pour $n \geq 0$, étant donnés u^n, y^n, p^n, g^n, d^n .

Etape 2 Descente

- (27) Recherche de $p^n \in \mathfrak{R}$ tel que :
 $J(u^n - p^n d^n) \leq J(u^n - p d^n), \forall p \in \mathfrak{R}$
- (28) $u^{n+1} = u^n - p^n d^n,$
- (29) Résolution du problème $F(y^{n+1}) = u^{n+1}$, suivie de l'évaluation de l'observation $C(y^n)$ et de la fonctionnelle cout $J(u^n)$.

Etape 3 Calcul de la nouvelle direction de descente

- (30) Résolution du système adjoint
 $(\partial F / \partial y(y^{n+1}))^* p^{n+1} = -C'(y^{n+1})^* \Lambda_H(C(y^{n+1}) - z_d)$
- (31) Evaluation du gradient en u^{n+1}
 $J'(u^{n+1}).v = (\partial F / \partial u(y^{n+1}).v, p^{n+1})$
Y
- (32) On pose $g^{n+1} = J'(u^{n+1})$.

$$(33) \quad \text{Calcul de } \gamma^n \\ \gamma^n = (g^{n+1} - g^n, g^{n+1})_U / (g^n, g^n)_U$$

$$(34) \quad d^{n+1} = g^{n+1} + \gamma^n d^n.$$

Remarque 6 Chaque itération de gradient (passage de l'indice n à l'indice $n+1$) nécessite la résolution d'un système direct (29), d'un système adjoint (30) et la recherche du paramètre de descente optimal (27). Cette recherche peut être faite par dichotomie et régularisation parabolique auquel cas, chaque évaluation de la fonctionnelle cout nécessite la résolution d'un système direct de type (29). Cette étape est donc bien, dans le cas général, la plus coûteuse de l'algorithme (23)-(34). Par contre, lorsque le problème direct est linéaire, la fonctionnelle cout J est quadratique et les étapes (27)-(28)-(29) nécessitent la résolution d'un seul problème de "type direct". En effet, soit $P(p) = J(u^n - p d^n)$, il vient :

$$(35) \quad P(p) = J(u^n) - p J'(u^n).d^n + p^2/2 J''(u^n)(d^n, d^n)$$

En reprennant l'expression de la fonctionnelle cout J donnée en (9), il vient :

$$J'(u).d = (C(y(u)) - z_d, C' \delta y(d))_H,$$

où $\delta y(d)$ est la solution du problème linéarisé :

$$(36) \quad \partial F / \partial y. (\delta y(d)) = d,$$

et

$$J''(u) (d, d) = (C' \delta y(d), C' \delta y(d))_H.$$

L'évaluation des coefficients du polynome $P(p)$ revient donc à évaluer l'expression $C' \delta y(d)$ qui se fait via la résolution du problème (36).

On remplace alors l'étape 2 par :

Calcul de $\delta y(d^n)$ via la résolution du problème linéarisé et évaluation de $C'(\delta y(d^n))$.

(27)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Evaluation de } J'(u^n).d^n = r_1^n \text{ et } J''(u^n)(d^n, d^n) = r_2^n, \\ \text{et calcul de } \rho^n \text{ par :} \\ \rho^n = r_1^n / r_2^n \end{array} \right.$$

(28) Calcul de u^{n+1} (inchangé).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul de } y^{n+1} \text{ par : } y^{n+1} = y^n - \rho^n \delta y(d^n), \\ \text{Calcul de } C(y^{n+1}) \text{ par : } C(y^{n+1}) = C(y^n) - \rho^n C'(\delta y(d^n)), \\ \text{Evaluation de } J(u^{n+1}) \\ \text{. Soit directement à partir de } C(y^{n+1}) \\ \text{. Soit en utilisant le caractère quadratique de } J : \\ J(u^{n+1}) = J(u^n) - (r_1^n)^2 / 2 r_2^n. \end{array} \right.$$

Une méthode comparable peut être utilisée dans le cas où la relation $u \rightarrow (C(y(u)))$ est quadratique. Elle nécessitera la résolution de deux problèmes de type direct. Un exemple de cette situation est développé au paragraphe 5.2.2 et à l'annexe 3.

3. Application aux équations de St Venant - Identification des conditions aux limites.

3.1. Rappel de la méthode de résolution du problème direct

Nous considérons ici le seul cas des conditions aux limites de type Dirichlet sur les deux composantes du débit, pour le problème de propagation-diffusion. On rappelle que la discrétisation temporelle découple les termes de convection et les termes de propagation diffusion par une méthode de pas fractionnaires sous la forme suivante :

Pour $n = 0$, on se donne les valeurs de la hauteur d'eau h^0 et du débit Q^0 , à l'instant initial,

Pour $n \geq 0$, on décompose le système (1)-(2) en deux étapes :

Si h^n (resp. Q^n) désigne la valeur de h (resp. Q) au temps $n \Delta t$, Δt étant le pas de temps choisi, on résoudra :

$$(37) \quad (\hat{Q}_i^n - Q_i^n) / \Delta t + \nabla \cdot (\hat{Q}_i^n u^n) = 0, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ (Etape de convection)}$$

$$(38) \quad (h^{n+1} - h^n) / \Delta t + \nabla \cdot Q^{n+1} = 0,$$

$$(39) \quad (Q_i^{n+1} - \hat{Q}_i^n) / \Delta t - K \Delta Q_i^{n+1} + g h_m \partial h^{n+1} / \partial x_i = S_i + g(h_m - h^n) \partial h^n / \partial x_i, \\ \text{pour } i = 1, 2,$$

où h_m est une fonction indépendante du temps, donnée comme étant la valeur moyenne "à priori" de la hauteur d'eau sur l'intervalle de temps considéré.

Les équations (38)-(39) constituent les équations de propagation diffusion qui font l'objet, dans un premier temps, du problème d'identification.

3.3.1. Méthode de décomposition quasi directe.

A chaque pas de temps, nous avons à résoudre le problème suivant :

Etant donné h^n et Q^n au temps $n \Delta t$ et les conditions aux limites de type Dirichlet q^{n+1} sur la frontière Γ du domaine Ω , trouver (h^{n+1}, Q^{n+1}) dans $(H^1(\Omega))^3$, tel que ; en posant $\alpha = 1/\Delta t$:

$$(40) \quad \begin{cases} \alpha h^{n+1} + \operatorname{div} Q^{n+1} = \alpha h^n \text{ dans } \Omega, \\ \alpha Q^{n+1} - K \Delta Q^{n+1} + g h_m \nabla h^{n+1} = \alpha Q^n + S^{n+1} + g(h_m - h^n) \nabla h^n, \text{ dans } \Omega, \\ Q^{n+1} |_{\Gamma} = q^{n+1}. \end{cases}$$

Lorsque le coefficient de diffusion K est constant en espace, on peut éliminer l'inconnue Q entre les deux équations ; en prenant la divergence de l'équation des moments, pour obtenir, en posant $D = K \alpha + g h_m$:

$$(41) \quad \alpha^2 h^{n+1} - \operatorname{div}(D \nabla h^{n+1}) = \alpha^2 h^n + K \alpha \Delta h^n - \operatorname{div}(\alpha Q^n + S^{n+1} + g(h_m - h^n) \nabla h^n),$$

on récupère les conditions aux limites sur h^{n+1} , de type Dirichlet, en résolvant le problème de bord suivant :

$$(42) \quad A \lambda^{n+1} = B^{n+1},$$

où A est un isomorphisme de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ défini par :

Pour tout élément x de $H^{1/2}(\Gamma)$, $Ax \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et pour y dans $H^{1/2}(\Gamma)$,

$$(43) \quad \langle Ax, y \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}} = - \int_{\Omega} (\alpha^2 \psi_x Y + D \nabla \psi_x \nabla Y) dx + \int_{\Omega} g h_m (\alpha Z_x + \operatorname{div} Q_x) Y dx,$$

pour tout relèvement Y dans $H^1(\Omega)$ de y et où les quantités $\{Z_x, Q_x, \psi_x\} \in H^1(\Omega) \times (H^1_0(\Omega))^2 \times H^1_0(\Omega)$ sont solutions de :

$$(44) \quad \begin{cases} \text{Trouver } Z_x \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 Z_x v + D \nabla Z_x \nabla v) dx = 0, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \\ Z_x|_{\Gamma} = x, \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} \text{Trouver } Q_x \text{ dans } (H^1_0(\Omega))^2 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha Q_x v + K \nabla Q_x \nabla v) dx = \int_{\Omega} g h_m \nabla Z_x \cdot v dx, \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^2, \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \psi_x \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 \psi_x v + D \nabla \psi_x \nabla v) dx = \int_{\Omega} g h_m (\alpha Z_x + \operatorname{div} Q_x) v dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Le second membre B^{n+1} dépend des conditions aux limites q^{n+1} sur le débit, des valeurs au temps $n \Delta t$ de la solution (h^n, Q^n) et du second membre S^{n+1} de l'équation sur le débit. Ce second membre B^{n+1} est calculé par :

$$(47) \quad \langle B^{n+1}, y \rangle = \int_{\Omega} (\alpha^2 \psi_0^{n+1} Y + D \nabla \psi_0^{n+1} \nabla Y) dx - \int_{\Omega} g h_m (\alpha Z_0^{n+1} - \alpha z^n + \operatorname{div} Q_0^{n+1}) Y dx,$$

pour tout relèvement Y dans $H^1(\Omega)$ de la fonction y de $H^{1/2}(\Gamma)$, et où

$\{Z_0^{n+1}, Q_0^{n+1}, \psi_0^{n+1}\} \in H^1_0(\Omega) \times (H^1(\Omega))^2 \times H^1_0(\Omega)$ sont les solutions de :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } Z_0^{n+1} \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 Z_0^{n+1} v + D \nabla Z_0^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} (\alpha^2 z^n v + K \alpha \nabla z^n \nabla v \\ - \operatorname{div}(\alpha \mathbf{Q}^n + \mathbf{S}^{n+1} + g(h_m - h^n) \nabla h^n) \cdot v) dx \\ \text{pour toute fonction } v \text{ dans } H^1_0(\Omega), \end{array} \right.$$

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{Q}_0^{n+1} \in (H^1(\Omega))^2 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha \mathbf{Q}_0^{n+1} v + K \nabla \mathbf{Q}_0^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} -g h_m \nabla Z_0^{n+1} \cdot v \\ + \int_{\Omega} (\alpha \mathbf{Q}^n + \mathbf{S}^{n+1} + g(h_m - h^n) \nabla h^n) \cdot v dx \\ \text{pour toute fonction } v \text{ dans } (H^1_0(\Omega))^2, \text{ et } \mathbf{Q}_0^{n+1}|_{\Gamma} = \mathbf{q}^{n+1} \end{array} \right.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi_0^{n+1} \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 \psi_0^{n+1} v + D \nabla \psi_0^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} g h_m (\alpha Z_0^{n+1} - \alpha Z^n + \operatorname{div} \mathbf{Q}_0^{n+1}) v dx, \\ \text{pour toute fonction } v \text{ dans } H^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

On peut donc décomposer le vecteur B^{n+1} sous la forme :

$$B^{n+1} = B_1(\mathbf{q}^{n+1}) + B_2(z^n) + B_3(\mathbf{Q}^n) + B_4^{n+1},$$

où B_1 et B_3 sont respectivement dans $L(H^{1/2}(\Gamma))^2, H^{-1/2}(\Gamma)$ et $L((H^1(\Omega))^2, H^{-1/2}(\Gamma))$ et B_2 envoie $H^1(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et est quadratique.

3.1.2. Schéma de résolution du problème direct.

Nous entendons par problème direct, la résolution sur l'intervalle de temps $[0, T]$ du système (40), étant données les conditions aux limites \mathbf{q}^{n+1} à chaque pas de temps et les conditions initiales h^* et \mathbf{Q}^* .

Lorsque la quantité h_m ne varie pas au cours du temps, on fera la construction de l'opérateur de bord A , défini par les équations (43)-(46), une fois pour toutes. La résolution du problème direct se fait alors par :

Etape 1 Initialisation

(D.1) *Entrée de h^* et \mathbf{Q}^* (solutions initiales) .*

Pour $n \geq 0$, lorsque h^n et Q^n sont connues, on trouve h^{n+1} et Q^{n+1} par

Etape 2 Calcul du second membre B^{n+1}

(D.2) Résolution des systèmes (48)-(49)-(50)

(D.3) Evaluation de l'expression (47)

Etape 3 Calcul de λ^{n+1} .

(D.4) Inversion du système (42).

Etape 4 Calcul de la solution au temps $(n+1) \Delta t$

(D.5) Résolution de l'équation (41) avec la condition aux limites λ^{n+1} .

(D.6) Résolution de l'équation (40), sur Q

3.2. Identification des conditions aux limites.

3.2.1. Expression de la fonction cout.

On se donne un ensemble de points d'observations S définis comme en

(16), $S = \bigcup_{i=1}^{Nobs} \{x_i\}$ et pour chaque pas de temps, un ensemble d'observations

$O^n = \bigcup_{i=1}^{Nobs} \{(h_d^n)_i, (Q_d^n)_i\}$. On définit alors la fonction cout par :

$J : (H^{1/2}(\Gamma))^N \rightarrow \mathbb{R}^+$, avec $N = T / \Delta t$ le nombre de pas de temps,

$$(51) \quad J(q) = 1/2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{Nobs} \{ \chi_{i,n}^Z (h^n(x_i) - (h_d^n)_i)^2 + \chi_{i,n}^{Q_1} (Q_1^n(x_i) - (Q_{1,d}^n)_i)^2 + \chi_{i,n}^{Q_2} (Q_2^n(x_i) - (Q_{2,d}^n)_i)^2 \},$$

où χ^{z,Q_1,Q_2} jouent le rôle de poids de la façon suivante :

$$(52) \quad \begin{cases} \chi_{i,n}^p \neq 0 \text{ lorsque l'expression } P \text{ est effectivement} \\ \text{observée au point } x_i \text{ et au temps } n\Delta t, \\ \chi_{i,n}^p = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'introduction de ces "poids" permet de faire varier facilement la position et le nombre d'observations sur les inconnues, ainsi que l'importance de ces observations sur le cout global ($\chi_{i,n}^p$ varie entre les valeurs 0 et 1).

3.2.2. Vers le système adjoint

Pour pouvoir calculer le gradient de la fonctionnelle définie en (51), on doit, comme au paragraphe 2.2, trouver le problème adjoint associé au problème direct décrit en 3.1.2. Pour ce faire, on "dérive" les équations du problème direct par rapport "aux conditions aux limites" (ici par rapport à q), et on choisit comme fonction test les vecteurs adjoints. On reprend pour cela les étapes décrites au paragraphe 3.1.2.

Etape 1 Initialisation

(DD.1) On se donne $\delta h^* = 0$, $\delta Q^* = 0$

Pour $n \geq 0$, δh^n et δQ^n sont connues, on trouve δh^{n+1} et δQ^{n+1} par :

Etape 2 Calcul du second membre δB^{n+1}

$$(53) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \delta Z_0^{n+1} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta Z_0^{n+1} v + D \nabla \delta Z_0^{n+1} \cdot \nabla v) dx \\ = \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta h^n v + K \alpha \nabla \delta h^n \cdot \nabla v - \text{div}(\alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) v) dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta Q_0^{n+1} \text{ dans } (H^1(\Omega))^2, \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} (\alpha \delta Q_0^{n+1} v + K \nabla \delta Q_0^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} -g h_m \nabla \delta Z_0^{n+1} v \\ \quad + (\alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) v dx, \\ \forall v \in (H^1_0(\Omega))^2, \delta Q_0|_{\Gamma} = \delta q^{n+1}, \end{array} \right.$$

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \psi_0^{n+1} \text{ dans } H^1_0(\Omega), \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta \psi_0^{n+1} v + D \nabla \delta \psi_0^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} g h_m (\alpha \delta Z_0^{n+1} - \alpha \delta h^n \\ \quad + \operatorname{div} \delta Q_0^{n+1}) v dx, \\ \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{array} \right.$$

(DD.3) *Evaluation de l'expression (43) où on a substitué δZ_0 , δQ_0 , $\delta \psi_0$ et δz^n à Z_0 , Q_0 , ψ_0 et z^n .*

(DD.4) Etape 3 Inversion du système $A(\delta \lambda)^{n+1} = \delta B^{n+1}$

Etape 4 Calcul de δh^{n+1} et δQ^{n+1} par :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta h^{n+1}) \in H^1(\Omega) \text{ tel que : } \forall v \in H^1_0(\Omega) \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta h^{n+1} v + D \nabla \delta h^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} \{ \alpha^2 \delta h^n v + K \alpha \nabla \delta h^n \nabla v \\ \quad - \operatorname{div} (\alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) \cdot v \} dx \\ \delta h^{n+1}|_{\Gamma} = \delta \lambda^{n+1} \end{array} \right.$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta Q^{n+1}) \in (H^1(\Omega))^2 \text{ tel que : } \forall v \in (H^1_0(\Omega))^2 \\ \int_{\Omega} (\alpha \delta Q^{n+1} v + K \nabla \delta Q^{n+1} \nabla v) dx = \int_{\Omega} (-g h_m \nabla \delta h^{n+1} \cdot v \\ \quad + (\alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) v) dx \\ \delta Q^{n+1}|_{\Gamma} = \delta q^{n+1}. \end{array} \right.$$

Posons $C^2 = g h_m$, $U^n = g(h_m - h^n) \nabla h^n$, $\delta U^n = g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n$, prenons dans l'équation (56) $v = r^{n+1}$ avec $r^{n+1} \in H^1_0(\Omega)$, et dans l'équation (57) $v = s^{n+1}$ avec $s^{n+1} \in (H^1_0(\Omega))^2$. En sommant sur n (dans

l'espace temps), on obtient une quantité identiquement nulle qui fait apparaître des termes en δQ et en δh . Cette expression est le point de départ de l'établissement du problème adjoint. La difficulté principale consiste dans le fait que les conditions aux limites de Dirichlet n'entrent pas directement dans la formulation variationnelle du problème. Le problème adjoint sera établi dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet par similitude avec le cas des conditions aux limites de type Neumann pour lesquelles ce problème ne se pose pas. (Cf Annexe 1)

3.23 Le système adjoint dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet

Le système adjoint est un système rétrograde (intégration du temps dans le sens inverse du sens habituel). Ceci est essentiellement du au fait d'une intégration par parties par rapport au temps qui transforme les dérivées temporelles en leurs opposés.

On part donc du temps final $(N+1) \Delta t$, pour lequel on impose toutes les quantités nulles. La résolution du système adjoint consiste à chaque pas de temps à la recherche de deux quantités, à savoir r^n et s^n (analogue de h^n et Q^n) et à la résolution d'un problème auxiliaire d'inconnues R^n, S^n, T^n analogue de Z_0^n, Q_0^n et ψ_0^n pour le problème direct

Schéma de résolution du problème adjoint

Etape 1 Initialisation

(A.1) *Posons* $r^{N+1} = R^{N+1} = 0$, $s^{N+1} = S^{N+1} = 0$ et $T^{N+1} = 0$.

Pour $n = N, 1$, connaissant $r^{n+1}, s^{n+1}, R^{n+1}, S^{n+1}, T^{n+1}$,

Etape 2 Résolution des problèmes en s^n et r^n

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A.2)} \\ \text{(58)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{s}^n = (s_1^n, s_2^n) \text{ dans } (H^1_0(\Omega))^2 \text{ tels que :} \\ \int_{\Omega} (\alpha s_1^n v + K \nabla s_1^n \nabla v) dx = \int_{\Omega} (\alpha (s_1^{n+1} - S_1^{n+1}) v - \alpha (r^{n+1} - R^{n+1}) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1}) dx \\ \quad + \sum_{i=1}^{\text{Nobs}} \chi_{i,n}^{Q_1} (Q_1^n(x_i) - Q_{1,d}^n)_i v(x_i), \\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \end{array}$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha s_2^n v + K \nabla s_2^n \nabla v) dx &= \int_{\Omega} (\alpha (s_2^{n+1} - S_2^{n+1}) v - \alpha (r^{n+1} - R^{n+1}) \frac{\partial v}{\partial x_2}) dx \\ &+ \sum_{i=1}^{Nobs} \chi_{2,i}^{Q_2} (Q_2^n(x_i) - Q_{2,d}^n) v(x_i), \\ \forall v &\in H^1_0(\Omega), \end{aligned} \right.$$

(A.3) Trouver r^n dans $H^1_0(\Omega)$ tel que :

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha r^n v + D \nabla r^n \nabla v) dx &= \int_{\Omega} (\alpha^2 (r^{n+1} - R^{n+1}) v + K \alpha \nabla (r^{n+1} - R^{n+1}) \nabla v) dx \\ &+ \int_{\Omega} C^2 (\alpha T^{n+1} v - s^n \cdot \nabla v) dx + \int_{\Omega} (V^n v + W^n \cdot \nabla v) dx \\ &+ \sum_{i=1}^{Nobs} \chi_{i,n}^2 (h^n(x_i) - (h^n_d)_i) v(x_i), \\ \forall v &\in H^1_0(\Omega), \end{aligned} \right.$$

où $V^n = -g \nabla h^n \cdot (\nabla (r^{n+1} - R^{n+1}) - (s^{n+1} - S^{n+1}))$,
et $W^n = g(h_m - h^n) (\nabla (r^{n+1} - R^{n+1}) - (s^{n+1} - S^{n+1}))$.

(A.4) Etape 3 Evaluation du second membre du problème auxiliaire

On calcule $C^n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (analogue de B^n (étape D.3)) par :

Pour tout y dans $H^{1/2}(\Gamma)$, et Y relèvement de y dans $H^1(\Omega)$,

$$(61) \quad \begin{aligned} \langle C^n, y \rangle &= - \int_{\Omega} (\alpha^2 r^n Y + D \nabla r^n \nabla Y) dx + \int_{\Omega} (\alpha^2 (r^{n+1} - R^{n+1}) Y + K \alpha \nabla (r^{n+1} - R^{n+1}) \nabla Y) dx \\ &+ \int_{\Omega} ((C^2 \alpha T^{n+1} + V^n) Y + (-C^2 s^n + W^n) \cdot \nabla Y) dx, \end{aligned}$$

qui représente l'équation (60) "prise" en $v = Y$.

Etape 4 Résolution du système auxiliaire(A.5) *Inversion du système*

(62) ${}^tA \mu^n = C^n \text{ dans } H^{1/2}(\Gamma)$

(A.6) *Calcul de T^n, S^n, R^n*

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T^n \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ solution de :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 T^n v + D \nabla T^n \nabla v) dx = 0, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \\ T^n|_{\Gamma} = \mu^n, \end{array} \right.$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S^n \text{ dans } (H^1_0(\Omega))^2 \text{ solution de :} \\ \int_{\Omega} (\alpha S^n v + K \nabla S^n \nabla v) dx = \int_{\Omega} C^2 T^n \nabla \cdot v dx, \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^2, \end{array} \right.$$

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } R^n \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ solution de :} \\ \int_{\Omega} (\alpha^2 R^n v + D \nabla R^n \nabla v) dx = \int_{\Omega} C^2 (\alpha T^n v - S^n \cdot \nabla v) dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \end{array} \right.$$

Faire $n = n+1$, retour à l'étape 2.**3.2.4. Calcul du gradient**

Le calcul du gradient de la fonctionnelle cout est obtenu en cumulant les équations dérivées et les équations du système adjoint. On part de l'expression du cout donnée en (51) et on "dérive" par rapport à q dans $(H^{1/2}(\Gamma))^2$. On a donc :

$$(66) \quad \begin{aligned} J &: (H^{1/2}(\Gamma))^2 \rightarrow \mathcal{R}^+ \\ J'(q) &\in L((H^{1/2}(\Gamma))^2, \mathcal{R}), \text{ défini par :} \\ J'(q) \cdot \delta q &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{Nobs} \{ \chi^2_{i,n} (h^n(x_i) - (h^n_d)_i) \cdot \delta h^n(x_i) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \chi^Q_{k,i,n} (Q^n_k(x_i) - (Q^n_{k,d})_i) \delta Q^n_k(x_i) \} \end{aligned}$$

où δh et δQ sont les solutions du problème linéarisé décrit en (DD.1)-(DD.6).

Soit Y^n_q un relèvement dans $H^1(\Omega)$ de δq^n et Y^n_λ un relèvement dans $H^1(\Omega)$ de $\delta \lambda^n$ ($\delta \lambda^n$ solution de (DD.4)), alors :

$$(67) \quad \begin{cases} \delta Q^n - Y^n_q \in (H^1_0(\Omega))^2, \\ \delta h^n - Y^n_\lambda \in (H^1_0(\Omega)) ; \end{cases}$$

Si on prend dans (58)-(59), $(v_1, v_2) = \delta Q^n - Y^n_q$, et dans (60), $v = \delta h^n - Y^n_\lambda$, et si on somme sur l'ensemble des pas de temps, en tenant compte de l'appartenance à $H^1_0(\Omega)$ (resp. $(H^1_0(\Omega))^2$) de r^n (resp. s^n) et des équations (56) et (57), il vient :

en notant : a_1 la forme bilinéaire symétrique :

$$(68) \quad \begin{aligned} & a_1 : H^1_0(\Omega)^2 \rightarrow \mathfrak{R} \\ & a_1(u, v) = \int_{\Omega} (\alpha^2 uv + D \nabla u \cdot \nabla v) dx, \end{aligned}$$

et a_2 la forme bilinéaire symétrique :

$$(69) \quad \begin{aligned} & a_2 : (H^1_0(\Omega)^2)^2 \rightarrow \mathfrak{R} \\ & a_2(u, v) = \int_{\Omega} (\alpha u \cdot v + K \nabla u \cdot \nabla v) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J'(q) \delta q &= \sum_{n=1}^N a_2(s^n, \delta Q^n - Y^n_q) - \int_{\Omega} \{ \alpha (s^{n+1} - S^{n+1}) (\delta Q^n - Y^n_q) - \alpha (r^{n+1} - R^{n+1}) \cdot \text{div}(\delta Q^n - Y^n_q) \} dx \\ &+ \sum_{n=1}^N a_1(r^{n+1}, \delta h^n - Y^n_\lambda) - \int_{\Omega} \{ \alpha^2 (r^{n+1} - R^{n+1}) (\delta h^n - Y^n_\lambda) + K \alpha \nabla (r^{n+1} - R^{n+1}) \cdot \nabla (\delta h^n - Y^n_\lambda) \} dx \\ &- \int_{\Omega} \{ (C^2 \alpha T^{n+1} + V^n) (\delta h^n - Y^n_\lambda) + (-C^2 s^n + w^n) \cdot \nabla (\delta h^n - Y^n_\lambda) \} dx. \end{aligned}$$

En regroupant les termes correspondants aux équations (56) et (57), et en utilisant les valeurs de V^n et w^n :

$$\begin{aligned}
 J'(q). \delta q &= \sum_{n=1}^N a_2(s^n, \delta Q^n) + \int (-\alpha s^{n+1} \delta Q^n dx + C^2 s^n \nabla \delta h^n - g(h_m - h^n) s^{n+1} \nabla \delta h^n \\
 &\quad + g \nabla h^n \cdot s^{n+1} \cdot \delta h^n) dx \\
 \textcircled{1} \quad &+ \sum_{n=1}^N a_1(r^n, \delta h^n) + \int (+\alpha r^{n+1} \operatorname{div}(\delta Q^n) - \alpha^2 r^{n+1} \delta h^n - K \alpha \nabla r^{n+1} \nabla \delta h^n \\
 &\quad - g(h_m - h^n) \nabla r^{n+1} \nabla \delta h^n + g \delta h^n \nabla h^n \nabla r^{n+1}) dx \\
 &+ \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} (\alpha S^{n+1} \cdot \delta Q^n - \alpha R^{n+1} \operatorname{div}(\delta Q^n)) dx \\
 \textcircled{2} \quad &+ \sum_{n=1}^N (\alpha^2 R^{n+1} \delta h^n + K \alpha \nabla R^{n+1} \nabla \delta h^n - C^2 \alpha T^{n+1} \delta h^n - g \nabla h^n \cdot (\nabla R^{n+1} - S^{n+1}) \delta h^n \\
 &\quad + g(h_m - h^n) (\nabla R^{n+1} - S^{n+1}) \cdot \nabla \delta h^n) dx \\
 \textcircled{3} \quad &+ \sum_{n=1}^N -a_2(s^n, Y_Q^n) + \int_{\Omega} (\alpha (s^{n+1} - S^{n+1}) Y_Q^n - \alpha (r^{n+1} - R^{n+1}) \operatorname{div} Y_Q^n) dx \\
 &+ \langle C^n, \delta \lambda^n \rangle,
 \end{aligned}$$

où dans le dernier terme, on a utilisé l'expression de C^n donnée en (61) et le fait que Y_{λ}^n est un relèvement de $\delta \lambda^n$.

Maintenant, en remarquant que $r^{N+1} = R^{N+1} = 0$, $s^{N+1} = S^{N+1} = 0$, $T^{N+1} = 0$ et $\delta Q^* = 0$, $\delta h^* = 0$, et en utilisant les équations (56) et (57), les deux premiers termes 1 s'annulent.

Montrons maintenant que nous pouvons écrire les termes $\textcircled{2}$ sous la forme

$$\textcircled{2} = - \langle \delta B^{n+1}, \mu^{n+1} \rangle + \text{un terme dépendant seulement de } Y_q^n \text{ (i.e. } \delta q^n \text{)}.$$

Pour cela on prend les équations de l'étape (A.6) dans lesquelles on choisit pour "fonction test" respectivement $\delta \psi_o^{n+1}$, $\delta Q_o^{n+1} - Y_Q^{n+1}$, δZ_o^{n+1} qui sont de trace nulle sur Γ ; il vient :

$$(70) \quad a_1(T^{n+1}, \delta \psi_o^{n+1}) = 0$$

$$(71) \quad a_2(S^{n+1}, \delta Q_o^{n+1} - Y_Q^{n+1}) = \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot (\delta Q_o^{n+1} - Y_Q^{n+1}) dx,$$

$$(72) \quad a_1(R^{n+1}, \delta Z_o^{n+1}) = \int_{\Omega} C^2 (\alpha T^{n+1} \delta Z_o^{n+1} - S^{n+1} \cdot \nabla \delta Z_o^{n+1}) dx.$$

Prenons maintenant les équations qui permettent de calculer le second membre δB^{n+1} et pour lesquelles on choisit pour "fonction test" respectivement R^{n+1} , S^{n+1} et $T^{n+1} - Y_\mu^{n+1}$ de trace nulle sur Γ ; on obtient :

$$(73) \quad a_1(R^{n+1}, \delta Z_o^{n+1}) = \int_{\Omega} \{ \alpha^2 \delta h^n R^{n+1} + K \alpha \nabla \delta h^n \nabla R^{n+1} - \text{div}(\alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) \cdot R^{n+1} \} dx,$$

$$(74) \quad a_2(S^{n+1}, \delta Q_o^{n+1}) = \int_{\Omega} (-C^2 \nabla \delta Z_o^{n+1} + \alpha \delta Q^n + g(h_m - h^n) \nabla \delta h^n - g \delta h^n \nabla h^n) \cdot S^{n+1} dx,$$

$$(75) \quad a_1(T^{n+1} - Y_\mu^{n+1}, \delta \psi_o^{n+1}) = \int_{\Omega} C^2 (\alpha \delta Z_o^{n+1} - \alpha \delta h^n + \text{div}(\delta Q_o^{n+1})) (T^{n+1} - Y_\mu^{n+1}) dx.$$

Les différents termes intervenant dans la partie $\textcircled{2}$ du gradient, se retrouvent intégralement dans les seconds membres des équations (73)-(74)-(75), on a donc :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= a_1(R^{n+1}, \delta Z_o^{n+1}) + a_2(S^{n+1}, \delta Q_o^{n+1}) + \int_{\Omega} C^2 \nabla \delta Z_o^{n+1} \cdot S^{n+1} dx \\ &\quad + a_1(T^{n+1} - Y_\mu^{n+1}, \delta \psi_o^{n+1}) \\ &\quad - \int_{\Omega} C^2 (\alpha \delta Z_o^{n+1} + \text{div}(\delta Q_o^{n+1})) (T^{n+1} - Y_\mu^{n+1}) dx - \int_{\Omega} C^2 \alpha \delta h^n Y_\mu^{n+1} dx \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les équations (70), (71) et (72), il vient :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} = & a_1(R^{n+1}, \delta Z_o^{n+1}) + a_2(S^{n+1}, \delta Q_o^{n+1}) + \int_{\Omega} C^2 \nabla \delta Z_o^{n+1} \cdot S^{n+1} dx \\ & + a_1(T^{n+1} \cdot Y_{\mu}^{n+1}, \delta \psi_o^{n+1}) \\ & - \int_{\Omega} C^2 (\alpha \delta Z_o^{n+1} + \text{div}(\delta Q_o^{n+1}))(T^{n+1} \cdot Y_{\mu}^{n+1}) dx - \int_{\Omega} C^2 \alpha \delta h^n Y_{\mu}^{n+1} dx \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les équations (70), (71) et (72), il vient :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} = & -a_1(Y_{\mu}^{n+1}, \delta \psi_o^{n+1}) + \int_{\Omega} (C^2(\alpha \delta Z_o^{n+1} - \alpha \delta h^n + \text{div}(\delta Q_o^{n+1}))) Y_{\mu}^{n+1} dx \\ & + a_2(S^{n+1}, Y_Q^{n+1}) - \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot Y_Q^{n+1} dx. \end{aligned}$$

Nous utilisons alors l'équation (47) linéarisée en δZ_o^{n+1} , δQ_o^{n+1} , $\delta \psi_o^{n+1}$ et δz^n , qui donne :

$$\textcircled{2} = -\langle \delta B^{n+1}, \mu^{n+1} \rangle + a_2(S^{n+1}, Y_Q^{n+1}) - \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot Y_Q^{n+1} dx,$$

qui fournit, à son tour, l'expression du gradient sous la forme :

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} J'(q) \cdot \delta q &= \sum_{n=1}^N -\langle \delta B^{n+1}, \mu^{n+1} \rangle + \langle C^n, \delta \lambda^n \rangle \\ &+ \sum_{n=1}^N \left\{ -a_2(S^n, Y_Q^{n+1}) + \int_{\Omega} (\alpha(S^{n+1} - S^{n+1}) Y_Q^{n+1} - \alpha(r^{n+1} - R^{n+1}) \text{div} Y_Q^n) dx \right. \\ &\quad \left. + a_2(S^{n+1}, Y_Q^{n+1}) - \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot Y_Q^{n+1} dx \right\} \end{aligned} \right.$$

Maintenant, puisque δh^n et δQ^n sont nuls, δB^1 est identiquement nul, de même, μ^{N+1} est identiquement nul ; on peut donc "décaler" l'indice du premier terme $-\langle \delta B^{n+1}, \mu^{n+1} \rangle$ d'un indice. Ecrivons maintenant la relation entre δB^n et $\delta \lambda^n$ d'une part et μ^n et C^n d'autre part :

$$(77) \quad \begin{cases} \delta B^n = A \delta \lambda^n, \\ C^n = {}^t A \mu^n, \end{cases}$$

qui impliquent :

$$-\langle \delta B^n, \mu^n \rangle = -\langle A \delta \lambda^n, \mu^n \rangle = -\langle \delta \lambda^n, {}^t A \mu^n \rangle = -\langle \delta \lambda^n, C^n \rangle,$$

qui annulent, à son tour le premier terme du gradient en (76). Finalement, l'expression du gradient ne dépend bien que de y_Q^n , relèvement de δ_Q^n dans Ω . Ce qui achève le calcul du gradient.

Remarque 7 Par souci de simplicité, le système adjoint a été introduit tel que, directement. Evidemment, l'expression des équations adjointes est obtenue de manière plus ou moins explicite. La principale difficulté, dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, réside dans le fait que celles-ci n'entrent pas de façon naturelle dans la formulation variationnelle. On montrera comment les équations adjointes se déduisent de façon naturelle dans le cas où on recherche les conditions de type Neumann sur le débit, via la résolution du problème de bord sur la hauteur d'eau pour les conditions aux limites de type Neumann (voir Annexe 1).

3.3. Autres types de conditions aux limites

Nous avons établi au paragraphe 3.2, les équations du problème direct et du problème adjoint dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet sur la hauteur d'eau et le débit. C'est dans ce cas que les tests numériques, exposés au paragraphe 5, ont été effectués. Lorsque les conditions aux limites sont de type Neumann sur les deux inconnues h et Q , on trouvera en Annexe 1 les équations adjointes et le calcul de gradient. Pour d'autres conditions aux limites, conditions d'onde incidence, conditions de paroi, conditions mixtes de Neumann-Dirichlet, conditions de Neumann sur h et de Dirichlet sur Q , il suffit de reprendre les calculs faits au paragraphe 3.2 et les modifier en fonction du type de conditions aux limites envisagé. Chaque cas étant un cas particulier, on ne peut donner de formulation générale des équations adjointes, en particulier de l'expression du second membre C^n (cf (61)) du problème auxiliaire. (Voir par exemple la différence entre (61) et (A1.15)).

4. Approximation - Programmation

4.1. Approximation par éléments finis

Soit Ω un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ . Le cas des frontières courbes peut être facilement traité à partir d'un domaine polygonal ([18]) ou en utilisant des éléments finis isoparamétriques [19].

Soit T_h une famille de triangles de Ω , construit de manière habituelle ([19]) telle que :

$$(78) \quad \begin{aligned} & \bigcup K = \Omega ; \\ & K \in T_h \end{aligned}$$

Soit P_1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$(79) \quad \begin{aligned} V_h &= \{v_h \in C^0(\Omega) ; v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in T_h\} \\ &= \text{ensemble des fonctions continues, linéaires par triangle.} \end{aligned}$$

$$(80) \quad \begin{aligned} V_{o,h} &= V_h \cap H^1_0(\Omega) \\ &= \text{ensemble des fonctions de } V_h \text{ à trace nulle sur } \Gamma \\ &= \text{ensemble des fonctions de } V_h \text{ qui s'annulent aux} \\ &\quad \text{noeuds situés sur } \Gamma. \end{aligned}$$

$$(81) \quad \begin{aligned} & M_h \text{ un espace complémentaire de } V_{o,h} \text{ dans } V_h, \text{ défini par :} \\ & M_h \subset V_h, \quad V_h = V_{o,h} \oplus M_h. \end{aligned}$$

En pratique, on prendra :

$$(82) \quad M_h = \{v_h \in V_h ; v_h(P) = 0, \forall P \text{ noeud interne de } \Omega\}.$$

Le problème discret est alors obtenu en posant les différentes équations dans les espaces V_h ou $(V_h)^2$; pour les conditions de type Dirichlet, les fonctions tests seront choisies dans $V_{o,h}$ et $(V_{o,h})^2$.

Le passage du cas continu au cas discret, pour les conditions de type Dirichlet est particulièrement simplifié ici, puisque nous avons travaillé au paragraphe 3, directement sur les formulations variationnelles et les différentes intégrales qui interviennent sont calculées de manière exacte. Pour tout autre cas, il convient d'être extrêmement prudent lors du passage du cas continu au cas direct, le système adjoint devant être établi à partir du système direct discrétisé.

Dans la suite, nous noterons :

NDL le nombre de degrés de liberté total (interieur + frontière)
sur un champ scalaire inconnu (typiquement, h ou une
composante du débit),

NF le nombre total de degrés de liberté frontière,

N le nombre de pas de temps : T_f = Temps de la dernière
observation

$$T_f = N \Delta t$$

Nobs le nombre de points de mesures

Not le nombre de mesures effectivement observés dans
l'intervalle de temps $[O, T]$

Nnq le nombre d'inconnues du problème inverse

(Dans le cas où on recherche les conditions de Dirichlet sur toute la
frontière, $Nnq = NF \times N$).

Nous aurons à considérer des cas où les conditions aux limites ne
doivent être identifiées que sur une partie Γ^* de la frontière.

Dans ce cas on introduit l'espace fonctionnelle suivant :

$$M_h^* = \{v_h \in M_h ; v_h(P) = 0, \forall P \in \Gamma \setminus \Gamma^*\}$$

Remarque 8 Les équations adjointes du paragraphe 3 ont été établies
en tenant compte du terme correctif $g(h_m - h^n) \nabla h^n$. Dans tous les tests qui
suivent, nous n'avons pas tenu compte de ce terme, ceci dans un souci de
simplicité et pour les deux raisons suivantes :

a. En supprimant ce terme, le problème direct qui associe aux
conditions aux limites sur Ω les observations de la solution $\{h(x_i) \mid Q(x_i), i=1, \dots, Nobs\}$ est linéaire. Ce caractère linéaire permet de considérer la
fonctionnelle coût en tant que fonctionnelle quadratique et donc d'utiliser la
procédure exposée à la remarque 6.

b. En conservant le terme "non linéaire", les valeurs de la solution h^n
interviennent dans les second membres du système adjoint. Ce qui revient
à dire que la résolution du système adjoint nécessite le stockage des
solutions $(h^n, n=1, N)$, via la valeur de ces solutions en chaque degré de
liberté. Nous verrons que cela n'est pas nécessaire, dans le cas contraire.

4.2. Organisation de la programmation

Etant donné les conditions du calcul (choix des coefficients physiques, choix du pas de temps, donnée du type de conditions aux limites, choix du domaine d'étude), on peut calculer une fois pour toutes les matrices de résolution, à savoir :

a. La matrice $A_{1,h}$ associée à la forme bilinéaire a_1

$$A_{1,h} = \alpha^2 M + D K + \text{conditions aux limites}$$

où M matrice de masse $M_{ij} = \int_{\Omega} w_i w_j dx,$

K matrice de rigidité $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j dx.$

b. La matrice $A_{2,h}$ associée à la résolution d'un problème pour une composante du débit :

$$A_{2,h} = \alpha M + K K + \text{type de conditions aux limites}$$

c. La matrice associée au problème de bord A_h .

Ces trois matrices seront calculées, factorisées par une méthode de Choleski (dans le cas symétrique) ou de Gauss et stockées pour une utilisation ultérieure.

Pour ce qui est de la résolution effective du problème, on utilise l'algorithme de gradient conjugué décrit au paragraphe 2.3. Lorsqu'on cherche effectivement les conditions aux limites sous la forme la plus générale, le problème est globalement linéaire et il est possible de tenir compte de la remarque 6. L'articulation du programme de résolution est donc le suivant :

Etape 1 Initialisation globale Nit = 0

1.1 *Entrée des caractéristiques du calcul*

Triangulation, pas de temps, constantes physiques, matrices de

résolution

1.2 *Entrée de l'observation*

Position des capteurs, état des capteurs en h , Q_1 , Q_2 (valeurs des coefficients $\chi_{i,n}^z$ et $\chi_{i,n}^{Qk}$, $k = 1, 2$), valeurs des observations au cours du temps pour les capteurs "allumés"

1.3 *Entrée de l'état initial*

Donnée de la valeur au temps initial de la hauteur d'eau et du débit.

1.4 *Initialisation du contrôle*

Donnée de la condition aux limites initiales, et des noeuds où celle ci doit être identifiée ($q_h^0(i)$, $i=1, Nnq$)

1.5 *Calcul du cout initial et initialisation du vecteur d'état*

Pour $n = 1, N$ Résolution du système direct
Calcul de la composante au temps $n\Delta t$ du vecteur d'état

($q_{et}(i)$, $i=1, Nnq$)

calcul du cout initial $J^0 = J(q_h^0)$

(On calculera la composante du vecteur d'état à chaque pas de temps à partir de la solution du problème direct, on conservera seulement cette composante)

Pour $Nit \geq 0$, étant donnés les vecteurs q_h^{Nit} , q_{et}^{Nit} et le cout J^{Nit}

Etape 2 Calcul du vecteur de descente2.1 *Résolution du problème adjoint - Calcul du gradient*

($gra^{Nit}(i)$, $i=1, Nnq$)

Initialisation de tous les vecteurs adjoints à 0

Pour $n = N, 1$ 2.1.1 Calcul des seconds membres des équations adjointes à partir du vecteur q_{et}^{Nit} .

2.1.2 Résolution des équations adjointes au temps $n\Delta t$.

2.1.3 Transfert dans le gradient de la composante

correspondante des seconds membres des équations adjointes et du produit de s^n par la matrice A_2 .

2.1.4 Transfert dans le vecteur C^n du second membre de l'équation en r^n et du produit de r^n par la matrice A_1 .

2.1.5 Inversion du système adjoint de bord et calcul de μ^n .

2.1.6 Résolution des équations auxiliaires et transfert dans le gradient des termes correspondants.

2.2 Calcul du vecteur de descente ($d^{Nit(i)}$, $i=1, Nnq$)

2.2.1 Calcul de γ^{Nit}

$\gamma^{Nit} = 0$ si $Nit = 0$

$$\gamma^{Nit} = \frac{\sum_{i=1}^{Nnq} (\text{gra}^{Nit(i)} - \text{gra}^{Nit-1(i)}) \cdot \text{gra}^{Nit(i)}}{\sum_{i=1}^{Nnq} (\text{gra}^{Nit(i)})^2}, \text{ si } Nit \neq 0.$$

2.2.2 Evaluation du vecteur de descente d^{Nit}

$$\begin{aligned} d^{Nit} &= \text{gra}^{Nit}, \text{ si } Nit = 0, \\ d^{Nit} &= \text{gra}^{Nit} + \gamma^{Nit} d^{Nit-1}, \text{ si } Nit \neq 0. \end{aligned}$$

2.2.3 Calcul de la norme du gradient et du produit scalaire de gra^{Nit} par d^{Nit} .

Etape 3 Evaluation du controle à l'itération Nit + 1

3.1 Calcul de la quantité $qzet$, ($qzet^{Nit}(i)$, $i = 1, Nnq$)

Resolution du problème direct linéarisé avec pour conditions aux limites le vecteur de descente d^{Nit} et condition initiale nulle.

Evaluation de la quantité $qzet^{Nit}$ aux points d'observations.

3.2 Calcul du paramètre optimal ρ^{Nit} (cf Remarque 6)

$$\rho^{Nit+1} = \frac{\sum_{i=1}^{Not} qet^{Nit}(i) \cdot qzet^{Nit}(i)}{\sum_{i=1}^{Not} (qzet^{Nit}(i))^2} = \frac{\rho^{Nit+1}_{num}}{\rho^{Nit+1}_{den}}$$

3.3 Calcul du controle et de l'état

$$q^{Nit+1}(i) = q^{Nit}(i) - \rho^{Nit+1} \cdot d^{Nit}(i), \quad i = 1, Nnq,$$

$$qet^{Nit+1}(i) = qet^{Nit} - \rho^{Nit+1} \cdot qzet^{Nit}(i), \quad i=1, Not$$

3.4 Evaluation du cout J^{Nit+1}

$$J^{Nit+1} = \text{ou} \begin{cases} 1/2 \sum_{i=1}^{Not} (qet^{Nit+1}(i))^2 & (a) \\ J^{Nit} - 1/2 (p_{num}^{Nit+1})^2 / p_{den}^{Nit+1} & (b) \end{cases}$$

3.5 Test du gradient

$$\text{On vérifie que } J'(q^{Nit+1}).d^{Nit+1} = p_{num}^{Nit+1} = \sum_{i=1}^{Nnq} gra(i).d(i)$$

Remarque 9 Le schéma de résolution décrit ci dessus n'est valable que pour le cas où la relation condition aux limites \rightarrow observation de la solution est linéaire. Dans tout autre cas, il convient de modifier les étapes 3.2 (calcul de ρ^{Nit}), 3.3 (calcul de qet^{Nit+1}), 3.4 (second version (b)) et le test du gradient 3.5. Nous examinons le cas où la relation est quadratique dans les tests qui suivent.

4.3 Bilan des calculs - stockage

4.3.1 Place mémoire nécessaire

La place mémoire nécessaire dépend évidemment des caractéristiques du maillage, du nombre de points à identifier, du nombre d'itérations en temps. La gestion de cette place mémoire est faite de façon dynamique à l'aide des techniques mises au point par F.HECHT [18]. On peut donner une estimation de la place mémoire nécessaire en fonction des quantités NDL, NF, N, Nobs et Nnq définies au paragraphe 4.1.

Stockage de la triangulation P_1 . Coordonnées 2 * NDL (R)

Liste des noeuds par triangle
3 * NT (I)

Numéro de référence par triangle

		6 * NT	(I)
	Pointeur de bord	NF	(I)
<i>Construction des matrices de résolution</i>			
	Pointeur de matrice profil	NDL + 1	(I)
	Matrices profil	2 * NBPF	(R)
	Matrices morse	2 * NBNZ	(R)
	Pointeurs matrices morse	2 * (NDL+NBNZ)	(I)
	Matrice de bord	NF * NF	(I)
<i>Vecteurs de controle</i>	(q, gra, gra ⁿ⁺¹ , d)	4 * Nnq	(R)
<i>Etat</i>	Vecteurs d'état	3 * Not	(R)
	Pointeurs d'état ($\chi_{i,n}$)	4 * Nobs	(R)
<i>Vecteurs de travail</i>	16 vecteurs réels de taille NDL	16 * NDL	(R)
	6 vecteurs réels de taille NDL	6 * NF	(R)
	3 vecteurs entier de taille NF	3 * NF	(I)

Ces quantités seront évaluées pour chaque test particulier en fonction du maillage et du cas à traiter.

4.3.2 Bilan des opérations à effectuer

Outre la construction et la factorisation des matrices, qui seront effectués pour chaque cas (Maillage + données des caractéristiques physiques) une fois pour toute, on peut évaluer en terme de descente/remontée et calcul

de second membre le nombre d'opérations à effectuer (les autres opérations de type "scattering" sont négligeables), en fonction de N nombre de pas de temps et Nit* nombre d'itérations nécessaire à la convergence :

	Calcul de "second membre"	Inversion syst. profil type Choleski	Inversion syst. bord type Gauss
Nbre	$7 * N * (2 * Nit+1)$	$7 * N * (2 * Nit+1)$	$N * (2 * Nit+1)$
% du temps total *	40 %	50 %	7 %

* Références : CRAY recherche 1.S avec vectorisation.

5. Tests Numériques

Deux types de tests ont été effectués. D'une part, un test de type analytique sur un carré où la solution exacte est connue, et où les conditions aux limites ont été identifiées sur l'ensemble de la frontière ; d'autre part, un test plus physique sur une géométrie de type portuaire, où des conditions aux limites de type Dirichlet sont identifiées sur deux des "morceaux" de frontière maritime. Pour ce dernier test, on a effectué plusieurs tests en cherchant les inconnues sous forme du produit d'une fonction connue du temps par une fonction en espace, ou sous forme d'une fonction connue d'espace par une composante temporelle inconnue. Pour chacun de ces tests, on a fait varier le nombre de points observés et

éventuellement la position des capteurs.

5.1 Un test analytique

Dans ce premier test, le domaine Ω est un carré unité, triangulé de façon uniforme en 72 triangles. Il y a 24 noeuds situés sur la frontière. Le maillage de ce carré est représenté à la figure 1. On a testé le problème linéaire en cherchant les conditions aux limites sous forme libre. On a supprimé tous les termes sources, de telle sorte que les quantités :

$$h = \text{constante} = 10 \text{ m}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}$$

sont solutions des équations continues :

$$(83) \quad \begin{cases} \partial h / \partial t + \text{div } \mathbf{Q} = 0 \\ \partial \mathbf{Q} / \partial t - K \Delta \mathbf{Q} + g h_m \nabla h = 0. \end{cases}$$

Les constantes physiques sont choisies de la façon suivante :

$$K = \text{coefficient de diffusion} = 5 \text{ m}^2/\text{s},$$

$$h_m = h = 10, \text{ qui fournit } C^2 = 90,$$

$$\alpha = 1 / \Delta t = 60, \text{ qui conduit à un nombre de courant :}$$

$$C \Delta t / \Delta x \sim 1.$$

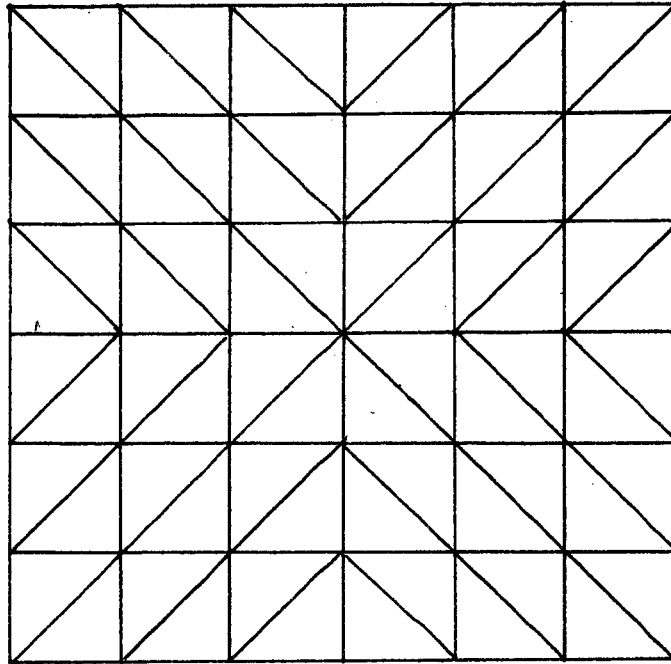


Figure 1

Pour tous les tests effectués, on a calculé l'observation exacte et on a initialisé les conditions aux limites par :

$$q^* = 0.$$

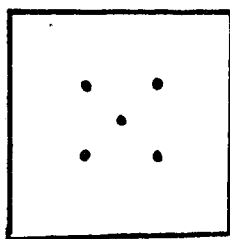
On a observé les deux composantes du débit et la hauteur d'eau en 5 points du maillage. La position des capteurs est variable. Ces tests ont permis de faire les remarques générales suivantes :

a. Variation du cout au cours des itérations.

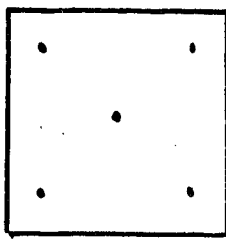
Le cout décroît rapidement au début du calcul et la convergence devient très lente dès que le cout a été divisé par 100 environ. Une tentative de réinitialisation du gradient conjugué par une étape de gradient à pas optimal ($\gamma^{Nit} = 0$) toutes les 10 itérations a montré l'inefficacité de ce procédé pour l'accélération de la convergence.

b. Variation de la position des capteurs.

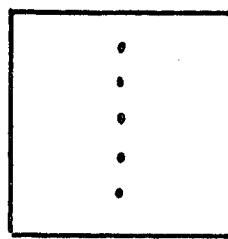
Avec les mêmes données que précédemment, on a fait évoluer la position



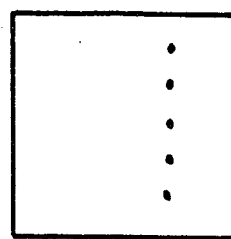
test 1
25 itérations



test 2
26 itérations



test 3
52 itérations



test 4
> 60 itérations

Ces résultats montrent l'intérêt d'une répartition "étalée" des capteurs par rapport à une répartition alignée.

c. Influence du nombre de capteurs

On augmente progressivement le nombre de capteurs et on remarque que lorsque le nombre de capteurs est petit, la convergence est rapide mais la solution obtenue est très différente de la solution exacte. Lorsque le nombre de capteur augmente, on atteint une situation optimale, où la solution exacte est obtenue avec une convergence rapide. Lorsque ce nombre est dépassé, le nombre d'itérations à la convergence augmente sans précision supplémentaire sur la solution.

Evaluation de la convergence en fonction du nombre de capteurs

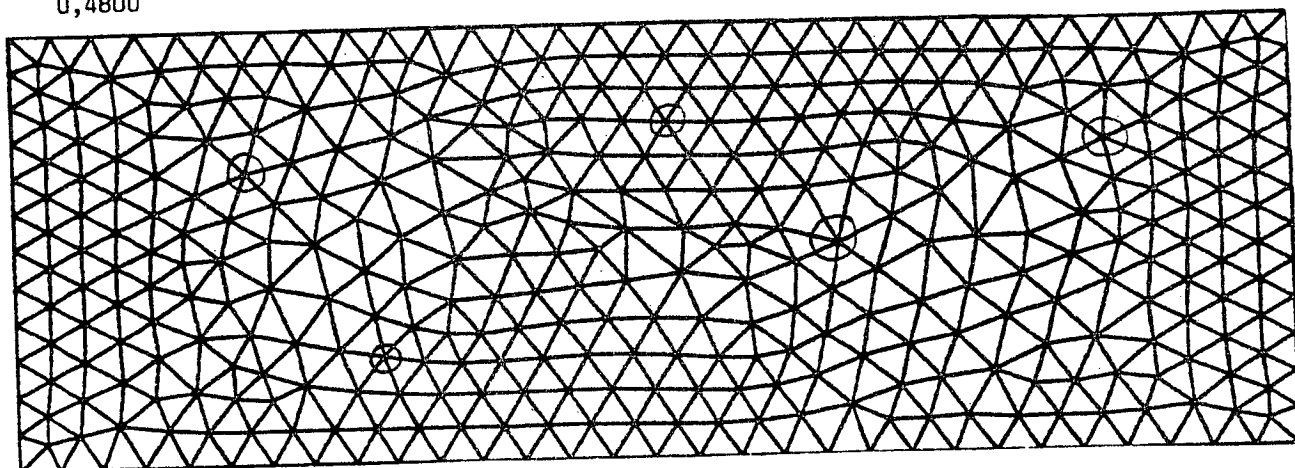
Nombre de capteurs	Nombre d'itérations à convergence
1	6 itérations
2	20 itérations
3	24 itérations
5	25 itérations

Une bonne approximation de la solution était déjà obtenue avec deux capteurs.

5.2 Simulation d'une baie avec et sans ouvrage.

Le domaine d'étude est, pour les tests qui suivent, un domaine rectangulaire de 12800m de long sur 4800m de large, comportant une frontière terrestre et trois frontières maritimes. A partir de ce domaine, on a simulé la présence d'ouvrages de type portuaire par deux jetées, une jetée rectiligne et une jetée en arc de cercle. Les triangulations de ces deux domaines sont représentées sur les figures 2 et 3. Elles ont été effectuées par la bibliothèque MODULEF.

0,4800

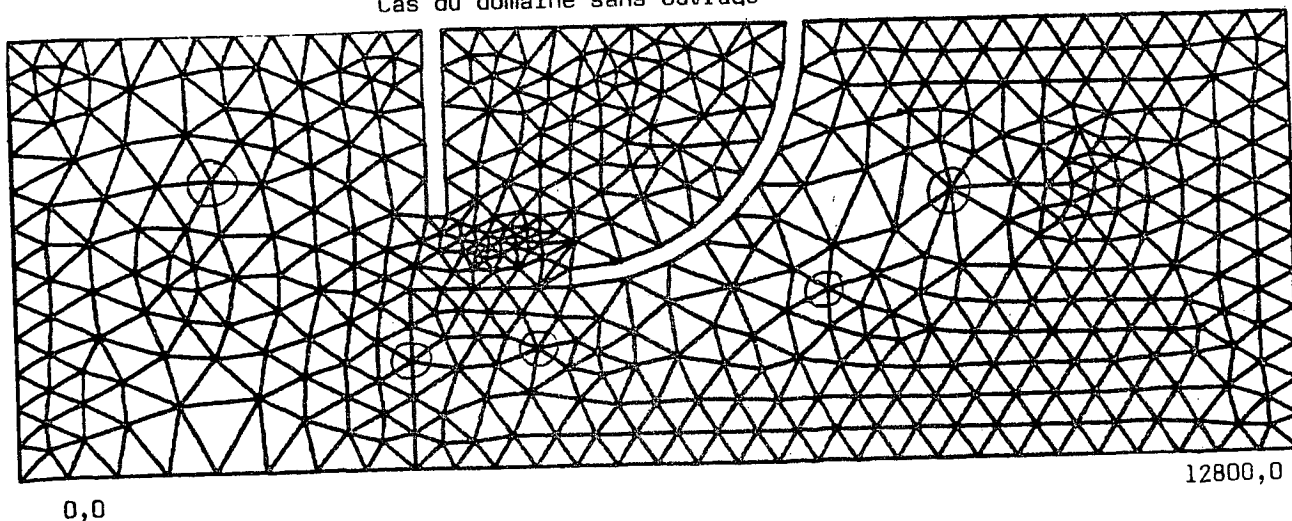


0,0

12800,0

Figure 2

Triangulation et position des capteurs
Cas du domaine sans ouvrage



0,0

12800,0

Figure 3

Triangulation et position des capteurs (test 1)
Cas du domaine avec ouvrage

Nous avons testé la méthode sur une période d'une marée (12 heures). Les coefficients physiques ont été choisis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K &= 5 \text{ m}^2/\text{s}, \\ h_m &= \text{constant} = 15 \text{ m.} \\ \Delta t &= 120 \text{ s puis } \Delta t = 1200 \text{ s.} \end{aligned}$$

En supposant que l'écoulement se fait essentiellement dans la direction horizontale, ces quantités conduisent à un nombre de courant de :

$$\begin{aligned} NC = C \frac{\Delta t}{\Delta x} &\approx 11.62 \cdot \frac{120}{425} \sim 3.28 \text{ pour } \Delta t = 120 \text{ s.} \\ &\sim 32.8 \text{ pour } \Delta t = 1200 \text{ s.} \end{aligned}$$

Sur la frontière terrestre, les conditions aux limites de Dirichlet sont nulles :

$$Q|_{\Gamma_{\text{terr}}} = 0,$$

Sur la frontière maritime, on a pris dans un premier temps des conditions de Dirichlet de type :

$$(84) \quad Q|_{\Gamma_{\text{mar}}} = Q_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T_m} (t - .72 x) \right) \cdot \exp(-\lambda y), \quad Q_0 = (2.5, 0),$$

où T_m est la période de la marée et où on a simulé un déplacement $\varphi = .72x$ entre l'entrée et la sortie (frontières verticales).

Dans un premier temps, à partir des contraintes physiques, on a construit et factorisé les matrices de résolution. A partir d'un état initial donné, on a calculé la solution correspondante aux conditions aux limites (84) et on a déduit les valeurs des observations aux différents "capteurs" représentés sur les figures 2 et 3.

5.2.1. Premier test : conditions de Dirichlet partout

Nous avons cherché à identifier les conditions de Dirichlet sur la frontière maritime verticale droite et pour la composante horizontale du débit seulement (la composante verticale est supposée s'annuler le long de cette frontière). Avec un pas de temps de 120 s ceci conduit à : $Nnq = 11$ points * 360 iter en temps = 3960. L'identification est faite sous forme libre. L'initialisation est linéaire entre les deux valeurs exactes sur les extrémités des frontières horizontales. Les résultats sous mentionnés ci dessous. Dans un second temps, on a cherché la composante temporelle des conditions aux limites sur la même partie de la frontière sous la forme :

$$(85) \quad Q = Q_0 \exp(-\lambda y) \cdot f(t),$$

où $f(t)$ inconnue, constant par morceau.

Pour ces tests, on a arrêté les calculs au bout de 7 itérations.

Caractéristiques des différents tests

N°test	Triangulation	λ	Nbre total* d'observation	Nbre total d'inconnus	Initialisation	J^0 / J^7
1	ss ouvrage	10^{-3}	3600	3960	0	77.2
2	" "	10^{-3}	3600	3960	Linéaire	90
3	avec ouvrage	10^{-3}	3600	3960	Linéaire	628
4	" "	7.10^{-4}	3600	3960	Linéaire	1310
5	" "	7.10^{-4}	720	360	Heariside**	2030

* Pour les quatre premiers test, on a observé les deux composantes du débit en chaque capteur. Pour le dernier test, les deux composantes du débit ont été observées en un seul capteur.

débit en chaque capteur. Pour le dernier test, les deux composantes du débit ont été observées en un seul capteur.

** Lorsque l'identification porte sur la composante temporelle seulement (test 5), l'initialisation est choisie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f^*(t) &= +1 \text{ pour } t \in]0,6h[\\ &= -1 \text{ pour } t \in]6h,12h[, \end{aligned}$$

elle conserve la périodicité de la fonction exacte.

La condition aux limites (85) respecte la continuité à la frontière terrestre ($Q = 0$ pour $y = y_{\max} = 4800$). On remarquera que lorsque la valeur de λ augmente, la pente de la solution au voisinage de $y = y_{\max}$ devient plus raide ; la difficulté d'approximation due à cette "raideur" ralentit le procédé de convergence (cf. comparaison du test 3 et 4).

Les figures 4, 5 et 6 montrent la forme de la solution (débit et hauteur d'eau) respectivement à l'initialisation linéaire, au bout de 7 itérations pour le cas du test 4 et à convergence complète (solution exacte) dans le cas du test 5. On remarquera la mauvaise approximation au voisinage de $y = 0$ sur la figure 5 et son influence sur la solution globale. Ces figures représentent les inconnues au temps $t = 13$ heures et 16 minutes, temps situé au milieu de l'intervalle d'étude.

Dans une seconde série de figures, on a représenté l'évolution du profil au cours des itérations, le long de la frontière $x = x_{\max} = 12800$, pour les tests 2, 3 et 4. On remarquera essentiellement la mauvaise approximation du profil au voisinage de la frontière terrestre ; ce défaut est visible sur la figure 5(a), où l'eau sort du domaine alors qu'il devrait y rentrer.

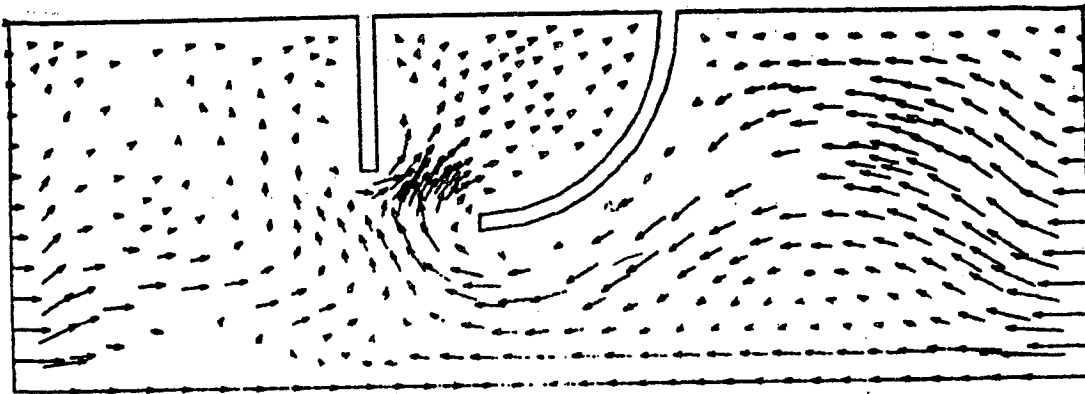


Figure 4(a) Initialisation linéaire

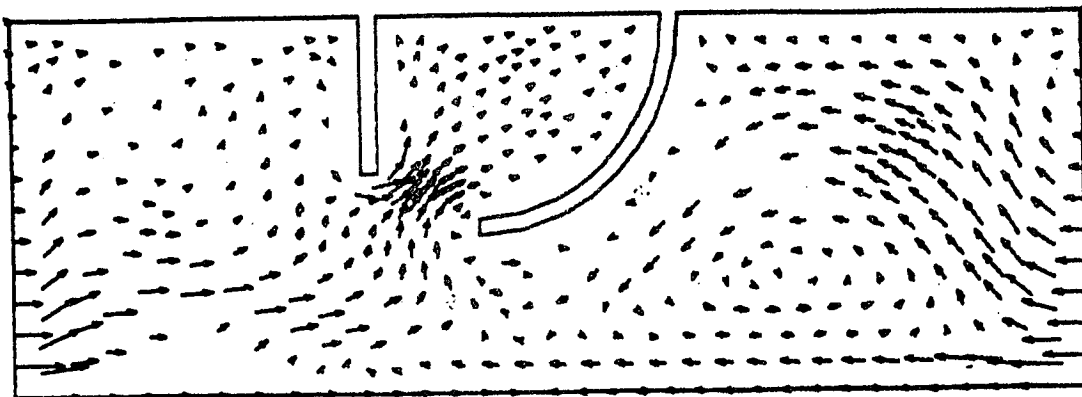


Figure 5(a) Après 7 itérations (test 4)

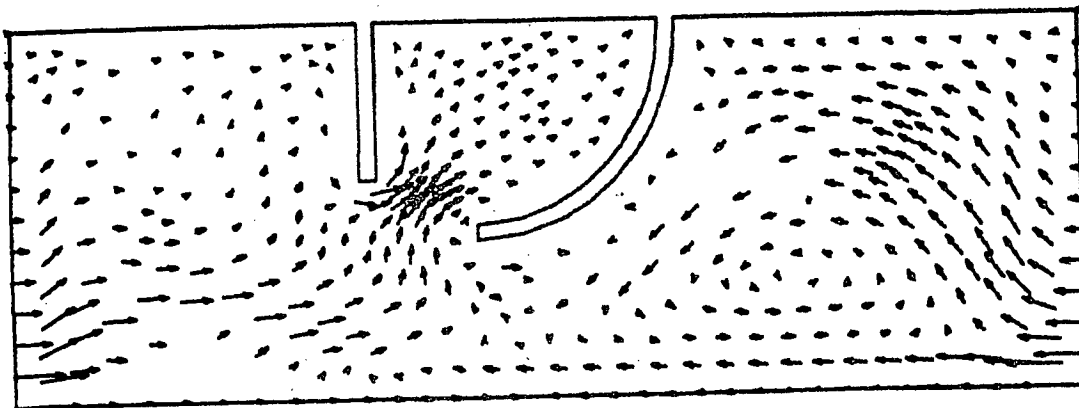


Figure 6(a) Solution exacte

Tracée des débits au temps $t = 13h\ 16mn$

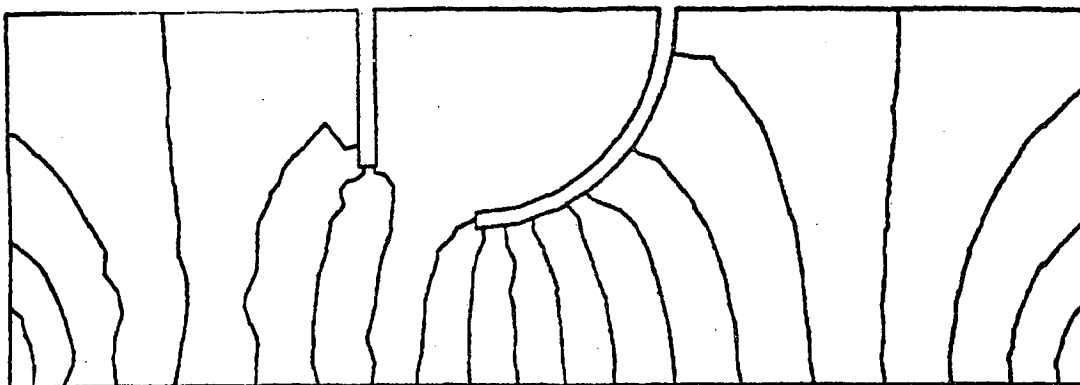


Figure 4(b) Initialisation lineaire

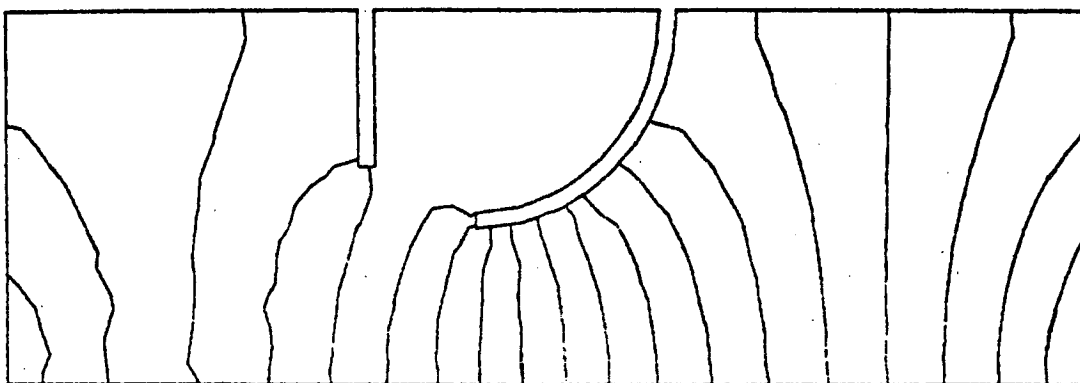


Figure 5(b) Après 7 itérations (test 4)

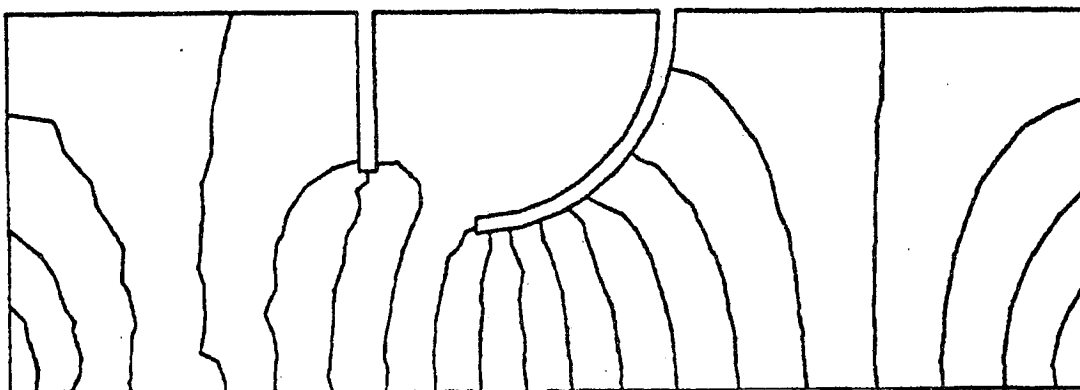
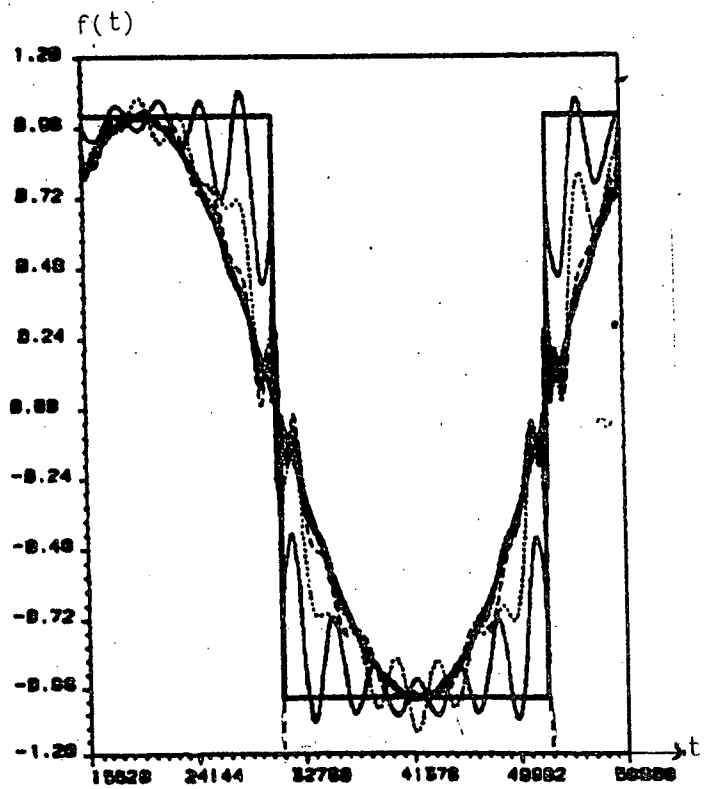
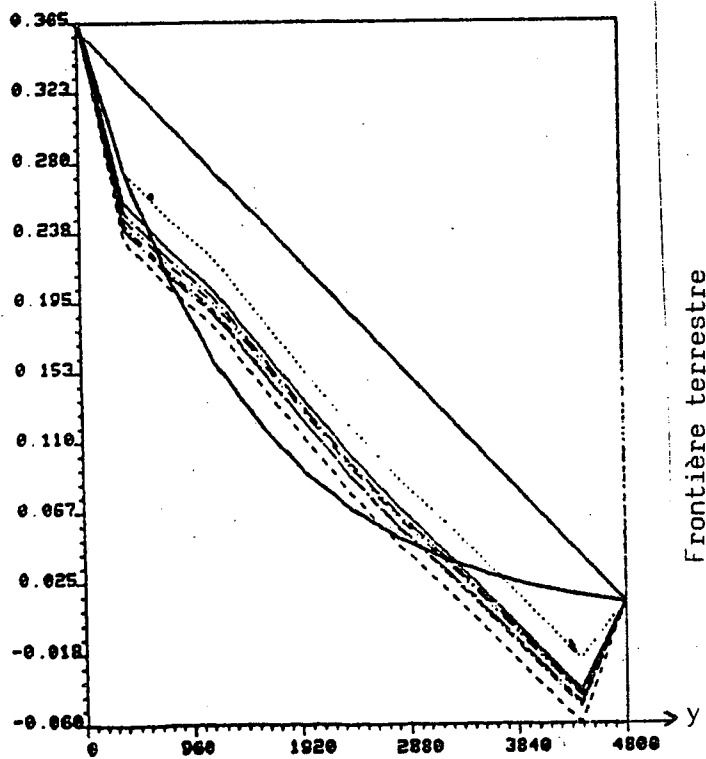
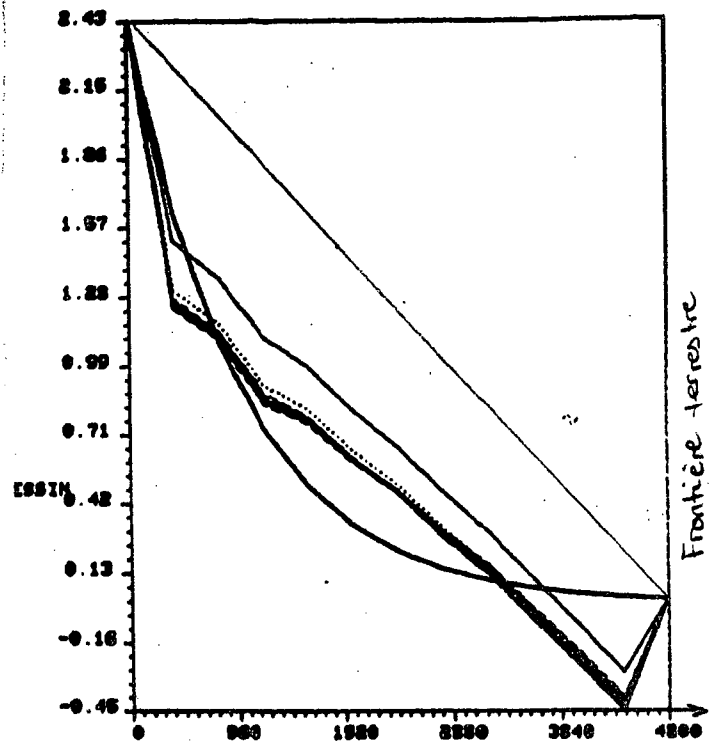
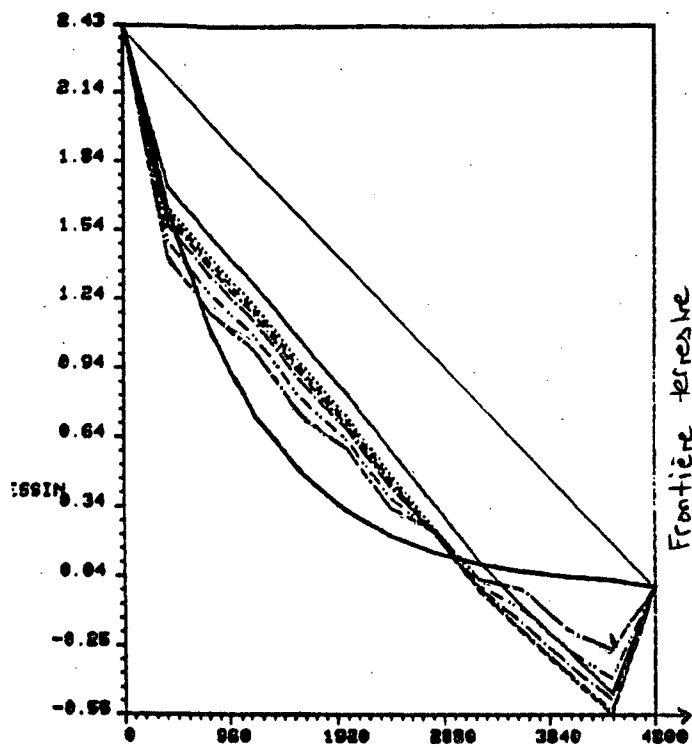


Figure 6(b) Solution exacte

Tracée des hauteurs d'eau au temps $t = 13h\ 16mn$



On remarque sur la figure 7, que la présence de l'ouvrage semble être un frein à la convergence de la solution vers la solution attendue.

A la figure 9, on a représenté la variation du profil $f(t)$ cherché, à l'état initial et au cours des itérations du gradient. Ceci montre une très bonne restitution du profil exact sinusoïdal en quelques itérations.

Du point de vue du temps de calcul, ces tests ont été faits sur le Cray Recherche 1.S. Chaque itération de gradient conjugué nécessite environ 90 s, dont 40 s pour la résolution du problème direct et 35 s pour la résolution du problème adjoint.

5.2.2. Seconde serie de tests : profil parabolique et conditions de Neumann sur la frontière maritime

Dans cette seconde serie de tests, nous avons tenté de résoudre le problème de façon plus physique, en choisissant des conditions de type Neumann pour les conditions aux limites à imposer sur la frontière maritime horizontale et en cherchant le profil sous forme parabolique. On décompose la frontière en quatre parties :

$$(86) \quad \Gamma_1 = \text{Frontière terrestre sur laquelle on impose } Q = 0. \\ = \{M(x,y) \mid y = 4800.\}$$

$$(87) \quad \Gamma_2 = \text{Frontière maritime horizontale} \\ = \{M(x,y) \mid y = 0.\}$$

sur Γ_2 , on impose : $Q_2 = 0$ ($Q.n = 0$, imperméabilité)
 $\partial Q_1 / \partial n = 0$ (condition de Neumann)

$$(88) \quad \Gamma^* = \Gamma^{*+} \cup \Gamma^{*-},$$

$$\Gamma^{*+} = \{M(x,y) \mid x = 0\}, \text{ (entrée)}$$

$$\Gamma^{*-} = \{M(x,y) \mid x = x_{\max} = 12800.\}, \text{ (sortie)}$$

sur laquelle on cherche à identifier les conditions aux limites sur le débit, sous forme "Dirichlet".

Sur Γ^* , le profil recherché est de la forme :

$$(89) \quad Q_1 = Q_0 (1 - y^2 / y_m^2),$$

pour respecter à la fois la continuité au raccord de Γ_1 ($Q_1(y_m) = 0$) et la continuité de la dérivée normale au raccord de Γ_2 .

Le changement de type de conditions aux limites sur Γ_2 impose un certain nombre de modifications sur le programme initial.

a. Construction des matrices de résolution.

Chaque composante du débit est traitée par une matrice différente.

Modification de la matrice de bord.

b. Modification des programmes de résolution des problèmes directs et adjoints.

Les équations du nouveau problème (Matrice de bord, problème direct adjoint, gradient) sont établies de la même façon que dans le cas précédent : il suffit pour cela de modifier la résolution des problèmes en "débit" en imposant pour la première composante de \mathbf{Q} , une condition de Neumann nulle et en conservant les mêmes sous programmes pour la seconde composante des débits (\mathbf{Q} ou \mathbf{S}). De même, on remplacera les termes de bord sur Γ par des intégrales sur Γ^* . Il suffira par cela de travailler dans les espaces suivants :

$$\left(\begin{array}{l} z, R, T \in V_h, \\ Q_1, S_1 \in V_h^* = \{v_h \in V_h \mid v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \partial v_h / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_2\} \\ Q_2, S_2 \in V_{o,h} \end{array} \right)$$

On trouvera le schéma de résolution des problèmes directs et adjoints en annexe 2.

On identifie ici la composante horizontale du débit sur Γ^* à partir des observations en 7 capteurs indiqués sur la figure 10.

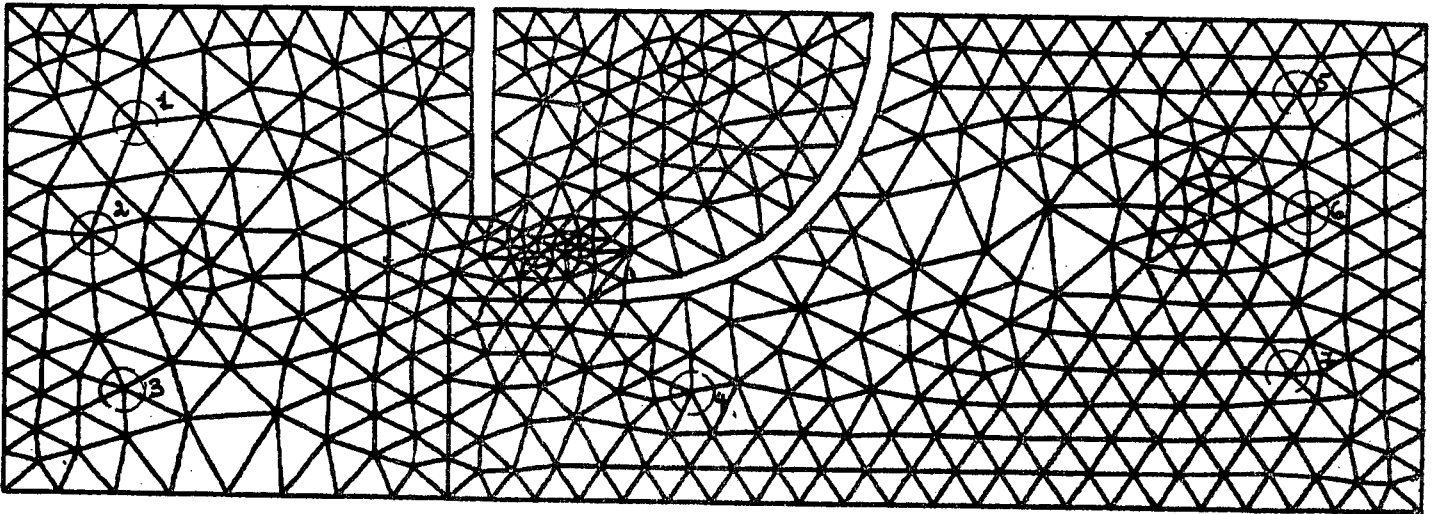


Figure 10

Position des capteurs

A partir de ces données nous avons effectué plusieurs séries de tests :

- a. recherche de q_1 sous forme libre : recherche de $q_1(x, y; t)$
- b. recherche de q_1 sous la forme $q_1 = f(x, t) g(y)$ où $g(y)$ est imposée et $f(t)$ est inconnue ; le problème reste ici linéaire et $f(t)$ est recherchée constante par morceau.
- c.* recherche de la composante "spatiale" de q_1 sous forme paramétrique:
 $(g(y) = a y^2 + b y + c, \quad a, b, c, \text{ inconnus}).$
- d. recherche simultanée des 3 constantes a, b, c et de la composante temporelle de q_1

Dans les trois premiers cas, la relation entre la variable de contrôle et l'observation est linéaire ; dans le dernier cas (d), elle est quadratique. Pour ce dernier cas, nous ne pouvons utiliser la remarque 6. Néanmoins, nous savons que, étant donné le vecteur de contrôle \mathbf{q} et le vecteur de descente \mathbf{d} , la fonction définie par :

$$(90) \quad P(\rho) = J(\mathbf{q} - \rho \mathbf{d}),$$

est un polynôme du quatrième degré en ρ , et ces coefficients sont obtenus en effectuant un développement de Taylor autour de zéro :

$$(91) \quad P(\rho) = J(\mathbf{q}) - \rho J'(\mathbf{q})\mathbf{d} + \frac{\rho^2}{2} J''(\mathbf{q})(\mathbf{d}, \mathbf{d}) - \frac{\rho^3}{6} J^{(3)}(\mathbf{q})\mathbf{d}^3 + \frac{\rho^4}{24} J^{(4)}(\mathbf{q})\mathbf{d}^4.$$

Pour obtenir les coefficients de ce polynôme, il suffit donc de dériver l'expression de la fonctionnelle cout par rapport aux inconnues.

Supposons qu'on recherche \mathbf{q} sous la forme :

$$\mathbf{q} = \mathbf{f} \times \mathbf{g},$$

on aura :

$$J(q) = J(f,g) = 1/2 \sum_{i=1}^{Not} (qet(i))^2,$$

où **qet** est le vecteur d'état des observations, obtenu à partir de la résolution du système direct, en prenant, pour conditions aux limites, **q** sur le débit. Par dérivation, on obtient :

$$(92) \quad \begin{aligned} J'_f(q) d_f &= \sum_{i=1}^{Not} qet(i) \cdot qzet_f(i), \\ J'_g(q) \cdot d_g &= \sum_{i=1}^{Not} qet(i) \cdot qzet_g(i), \end{aligned}$$

où **qzet_f** et **qzet_g** sont les observations obtenues en résolvant les équations directes linéarisées avec pour conditions aux limites, respectivement **d_f.g** et **d_g.f**. On obtient ainsi le coefficient de degré 1 du polynôme (91).

Si on agit de même pour le terme du second degré, il vient :

$$\begin{aligned} J''(q) \cdot \begin{pmatrix} d_f & d_f \\ d_g & d_g \end{pmatrix} &= J''(f,g), \\ &= \sum_{i=1}^{Not} 2 qet(i) \cdot qzzet(i)_{f,g} + (qzet(i)_f + qzet(i)_g)^2, \end{aligned}$$

où **qzzet(i)** est obtenu en résolvant les équations directes linéarisées avec, pour conditions aux limites, $\delta^2 q = df \cdot d_g$ sur le débit.

De la même façon, on obtient :

$$\text{et } J'''(q)(d^{(3)}) = \sum_{i=1}^{Not} 6 qzzet(i)_{fg} (qzet(i)_f + qzet(i)_g)$$

$$J^{(4)}(\mathbf{q})(\mathbf{d}^{(4)}) = \sum_{i=1}^{N_{ot}} 12 (q_{zzet}(i)_{f,g})^2.$$

Le calcul de ces coefficients nécessite donc la résolution de deux systèmes directs "linéarisés" avec, pour conditions aux limites sur le débit, respectivement, $df.g + f.dg$ et $df.dg$.

La recherche du paramètre optimal p équivaut à trouver la racine du polynôme $P(p)$ qui rend l'expression $P(p)$ optimale.

Ce travail sera fait à l'aide du sous programme PA03A de la bibliothèque HARWELL. On trouvera le détail des calculs à effectuer (actualisation du contrôle, calcul du gradient) à l'annexe 3.

Dans cette série de tests, on a choisi un pas de temps de 120 s, conduisant à un nombre de courant supérieur à 30.

Résultats des tests cas a.

L'inconnue est la répartition des vitesses horizontales en entrée et en sortie sous la forme générale $q(x,y,t)$, pour laquelle deux types d'initialisation ont été utilisés : D'une part une initialisation "linéaire" en phase de la forme :

$$(I_1) \quad q^*(x,y,t) = f(x,t) g^*(y)$$

où $f(x,t)$ est exacte, $f(x,t) = \sin 2\pi / T_m (t - .72x)$

et $g^*(y)$ est interpolé linéairement entre zéro sur la frontière terrestre et la valeur exacte sur la frontière maritime horizontale,

d'autre part la solution identiquement nulle (I_2). On a essentiellement fait varier le nombre de capteurs allumés et les composantes (h , Q_1 , Q_2) de la solution, observées effectivement.

Le nombre d'inconnues de ce problème vaut :

$$N_{nq} = N * 2 * 11 = 36 * 2 * 11 = 792 \text{ inconnues}$$

et le nombre d'observations varie entre 144 (cf test 4) et 468 (cf test 6).

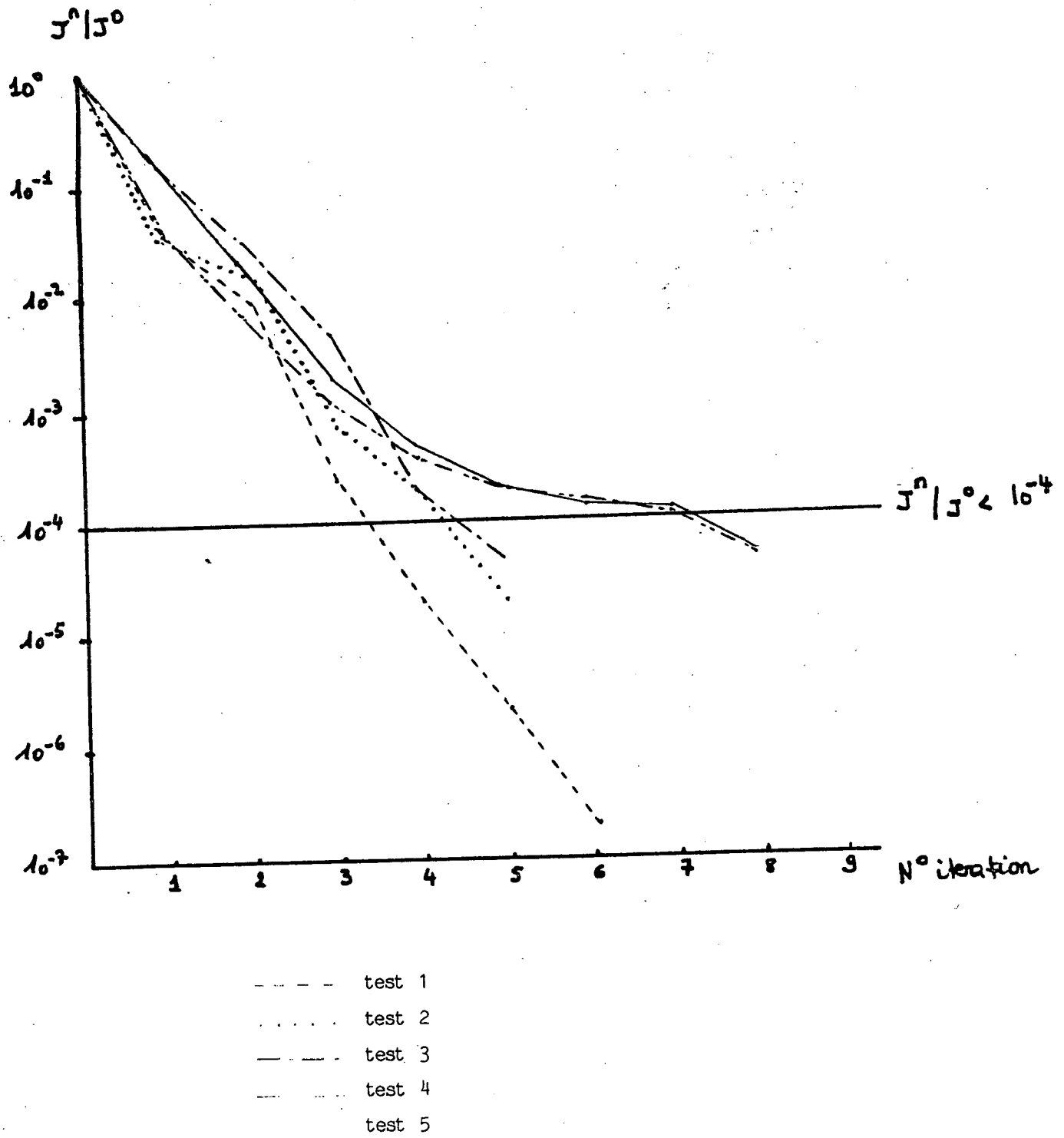
On a noté le rapport entre le nombre d'observations et le nombre d'inconnues. Le tableau ci dessous donne les caractéristiques des différents tests avec la convergence (Nombre d'itérations nécessaires pour que le rapport J^n / J^0 des couts à la $n^{\text{ième}}$ itération et à l'état initial atteigne une précision inférieure à $\epsilon = 10^{-4}$)

N° test	Type de l'initialisation	Position des capteurs allumés	R Nobs/Nmq	Nbre d'itérations	Convergence J^n / J^0
1	I_2	1,3,5,7 sur Q_1	0.182	4	.295 10^{-4}
2	I_2	1,2,3,5,6,7 sur Q_1	0.273	5	.312 10^{-4}
3	I_2	1,2,3,5,6,7 sur Q_1 4 sur h	0.318	5	.933 10^{-4}
4	I_2	1,2,3,5,6,7 sur Q_1 et Q_2	0.545	8	.689 10^{-4}
5	I_1	idem	0.545	9	.855 10^{-4}
6	I_2	1,2,3,5,6,7 sur Q_1 et Q_2 et 4 sur h	0.591	8	.951 10^{-4}

TABLEAU 1

Il ressort donc, de manière évidente, que la convergence est d'autant plus rapide que le nombre d'observations est faible : ce que nous avons déjà observé dans les séries de tests précédents. D'autre part l'initialisation I_1 qui semblait être à priori meilleure donne des résultats médiocres si on compare les tests 4 et 5, toutes choses égales par ailleurs. Ce qui tente à prouver que la qualité de l'initialisation influe peu sur la convergence, à moins qu'elle soit très proche de la solution exacte, cas que nous n'avons pas considéré ici.

On a représenté sur la figure 11 les courbes de convergence comparatives pour les tests 1 à 4 et 6, pour lesquels on avait choisi d'initialiser les inconnues par zéro.



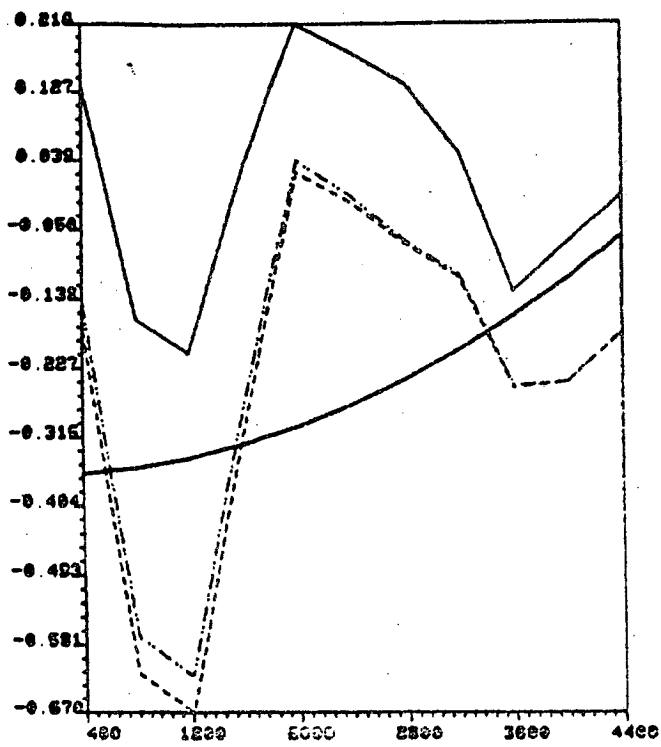
Comparaison des courbes de convergence

Figure 11

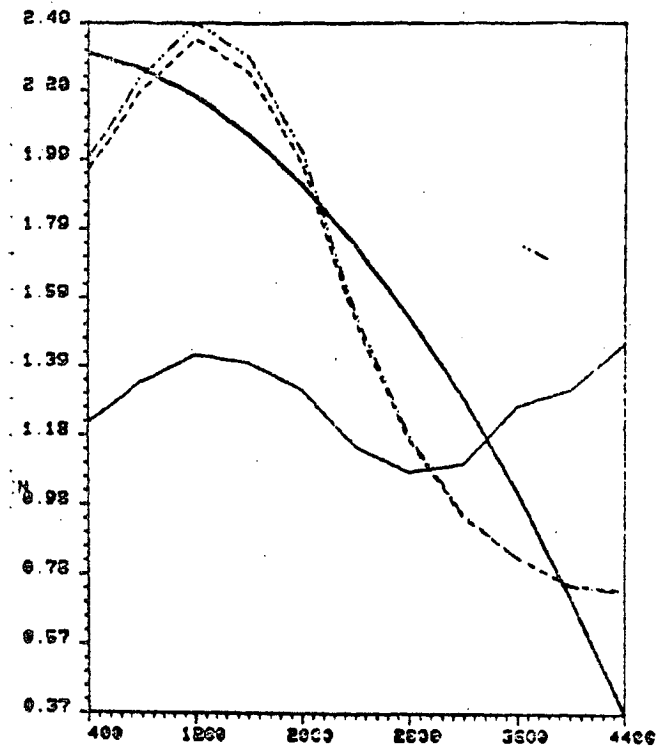
Sur les figures 12, on a représenté les profils des vitesses horizontales au cours des itérations de gradient pour les différents tests effectués au même instant et pour les deux frontières (Indice a sur Γ^{**} et Indice b sur Γ^{*-}). On remarque que la différence entre la solution exacte et la solution à convergence diminue (attention aux changements d'échelle) lorsque le nombre d'observations augmente, et que l'introduction d'une observation supplémentaire sur la hauteur d'eau (comparaison des tests 2 et 3 et des tests 4 et 6) améliore la précision sans augmentation du nombre d'itérations à convergence.

Les figures 14 représentent les solutions du problème direct à convergence et pour les différents tests effectués. On observera essentiellement l'impact très faible du profil de vitesses à la frontière sur la solution globale, en particulier au voisinage du port. Cette remarque nous encourage à choisir des capteurs situés au voisinage des frontières à traiter.

En outre, si seule la solution au centre du domaine importe, on peut assurer une solution très correcte à partir de quelques observations (test 1 ou 2), ce qui assure une convergence rapide.

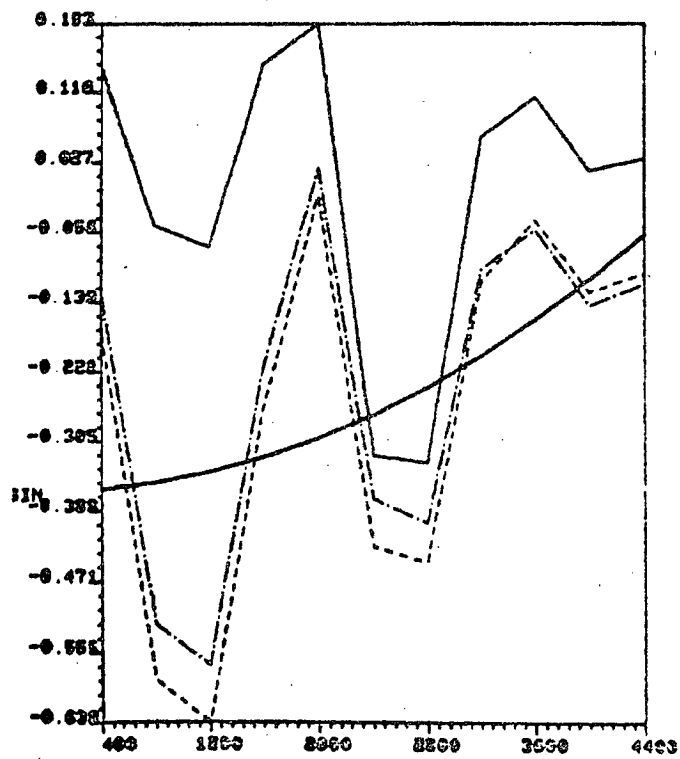


12.1.a

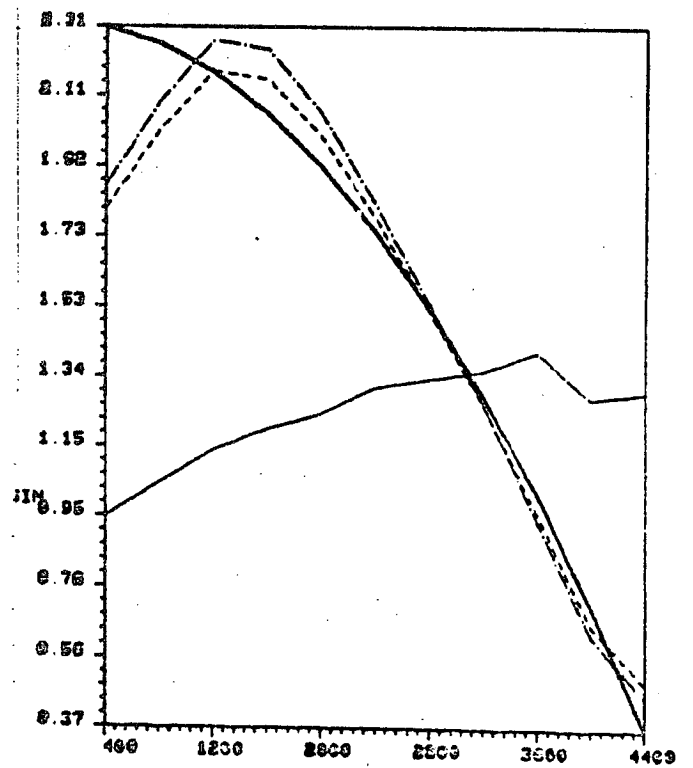


12.1.b

Test 1



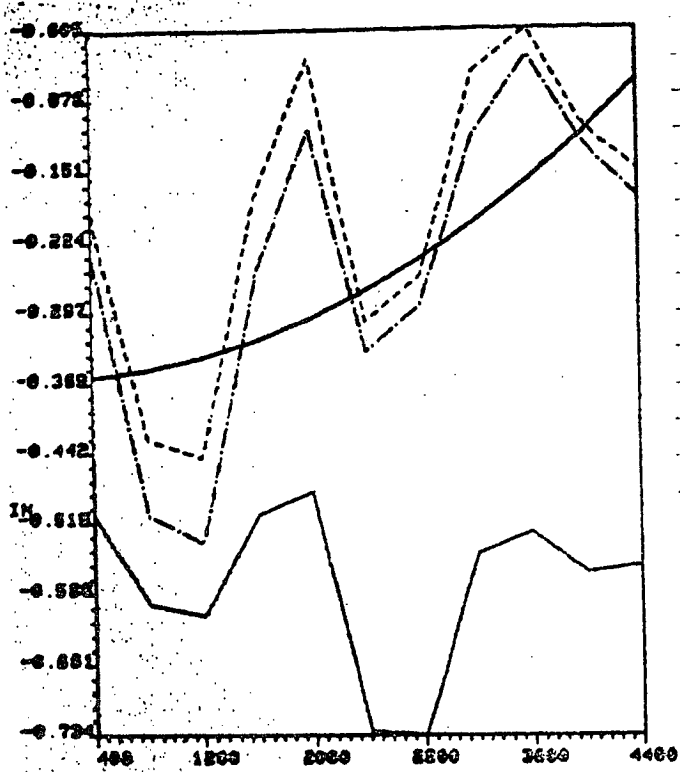
12.2.a



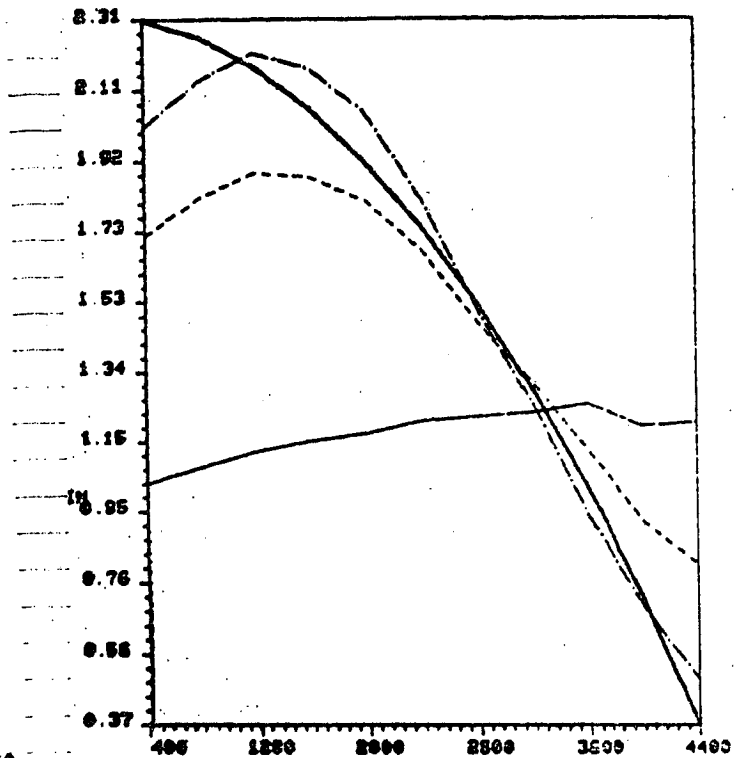
12.2.b

Test 2

Figures 12.1 et 12.2

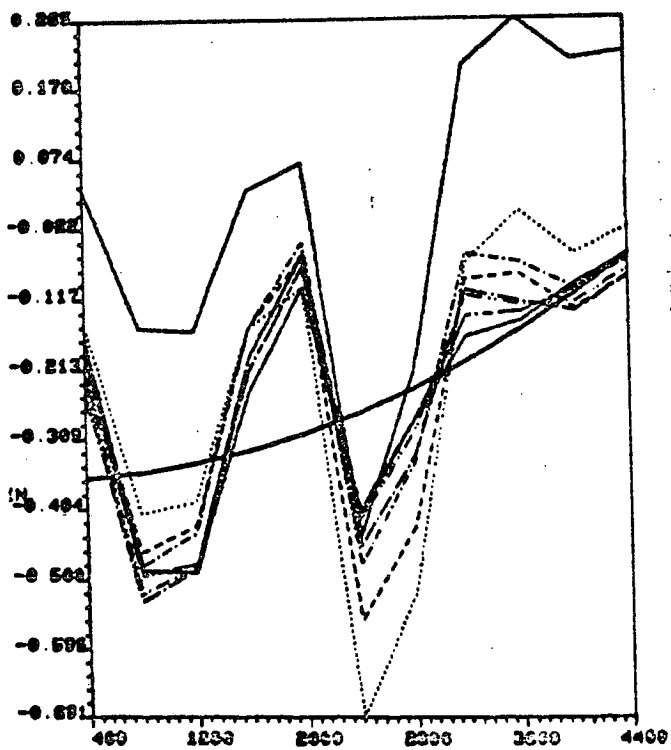


12.3.a

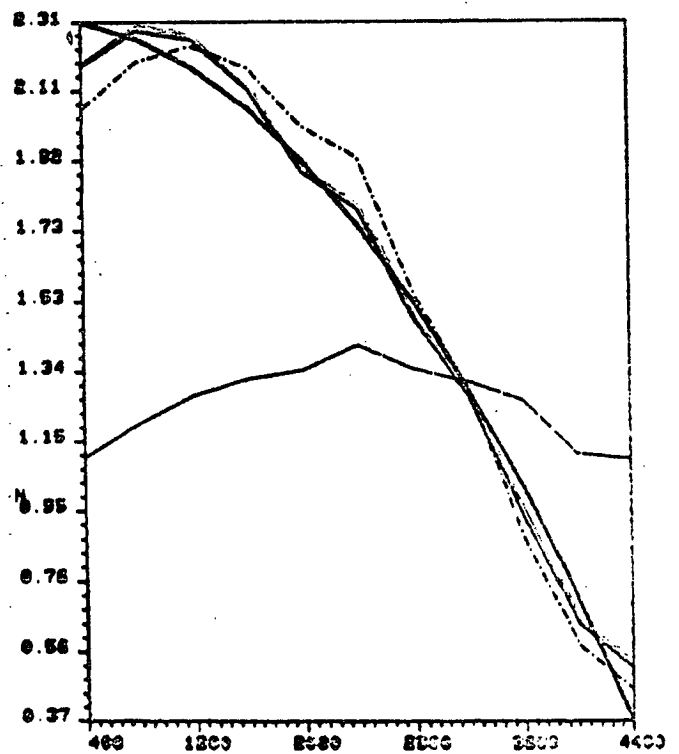


12.3.b

Test 3

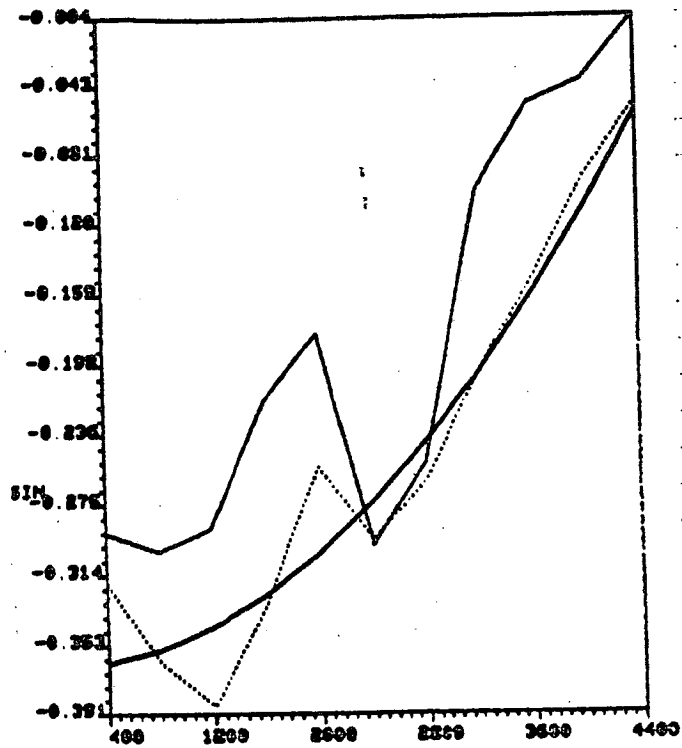


12.4.a

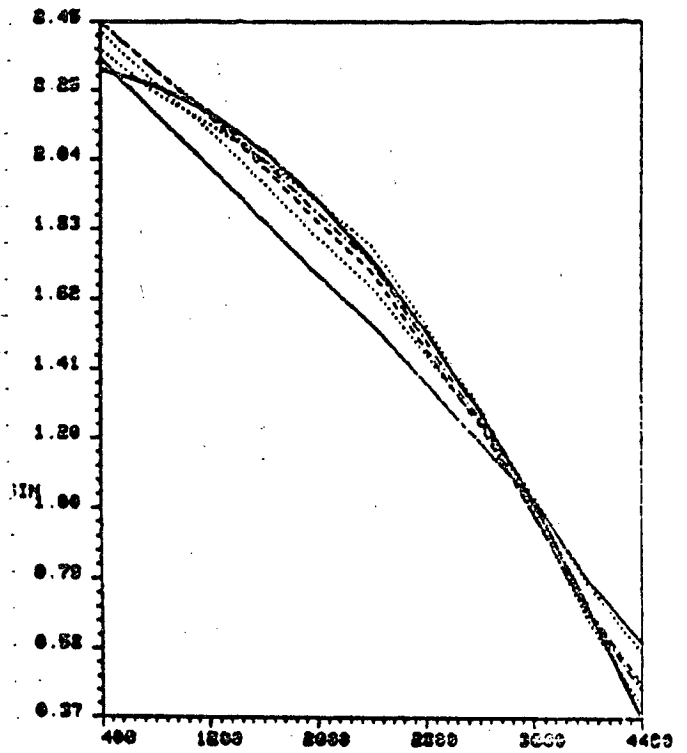


12.4.b

Test 4

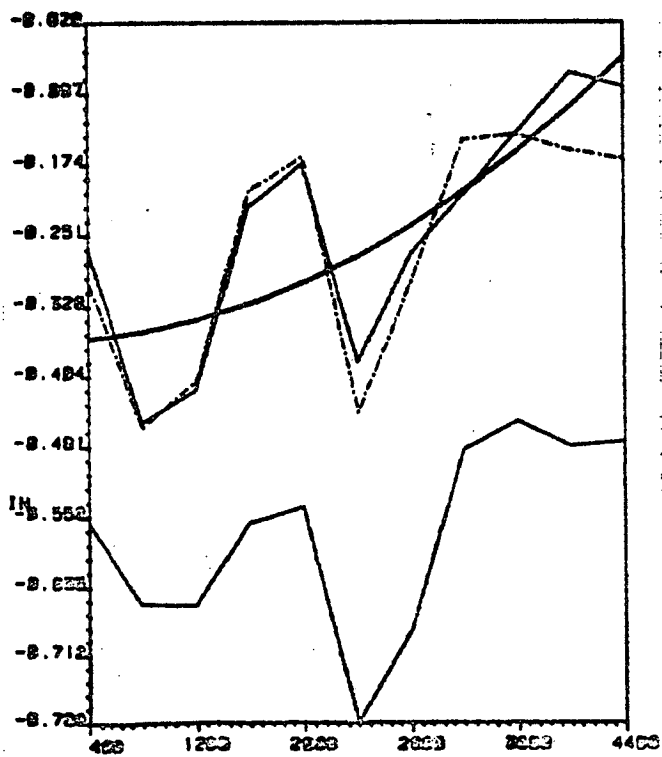


12.5a

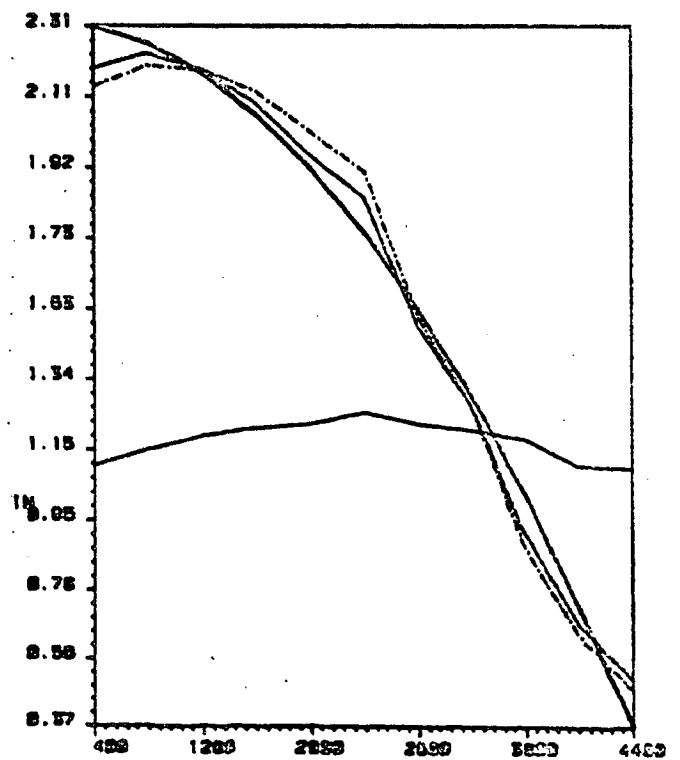


12.5.b

Test 5



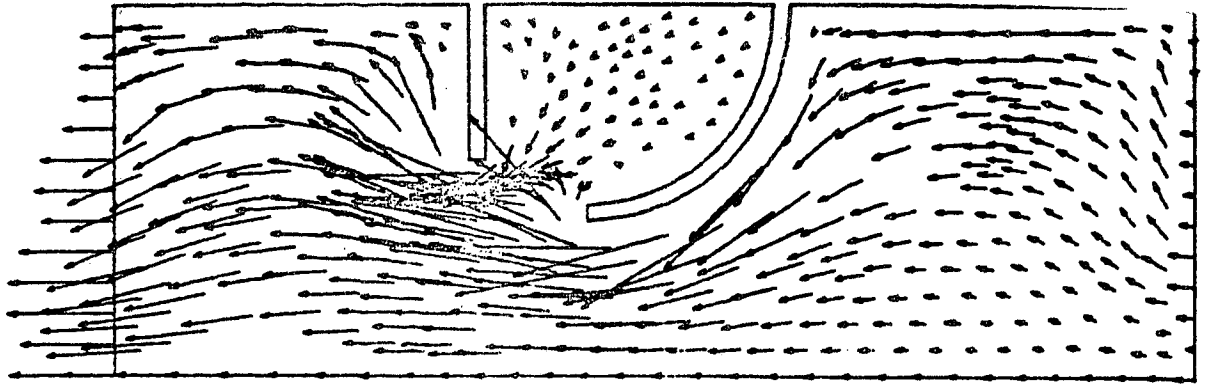
12.6.a



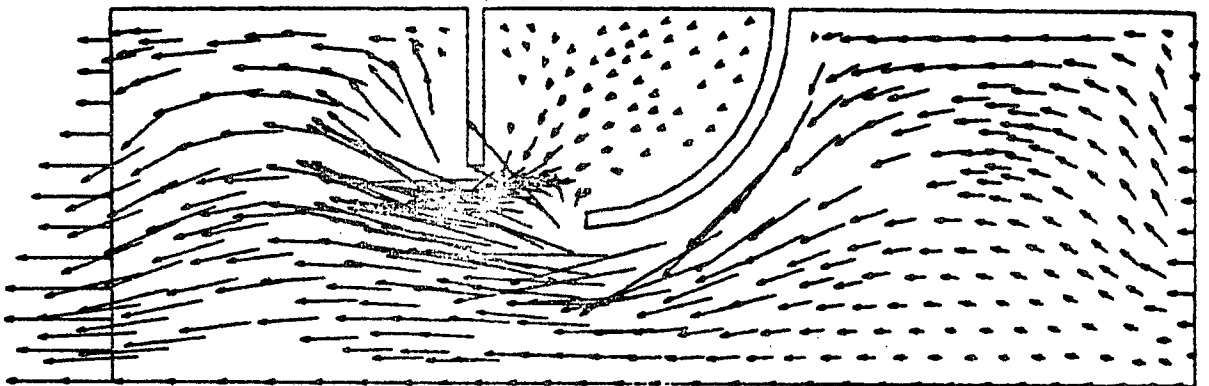
12.6.b

Test 6

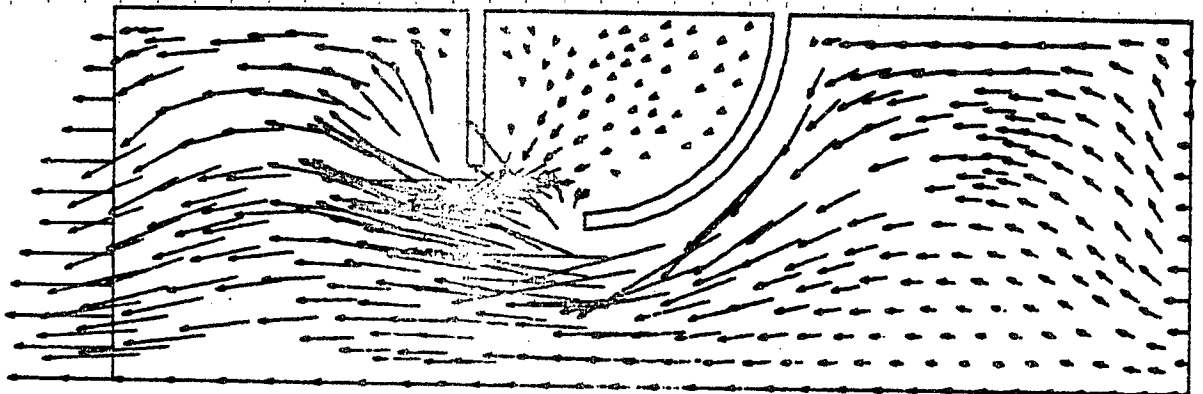
Test 2



Test 3



Test 4



Test 5

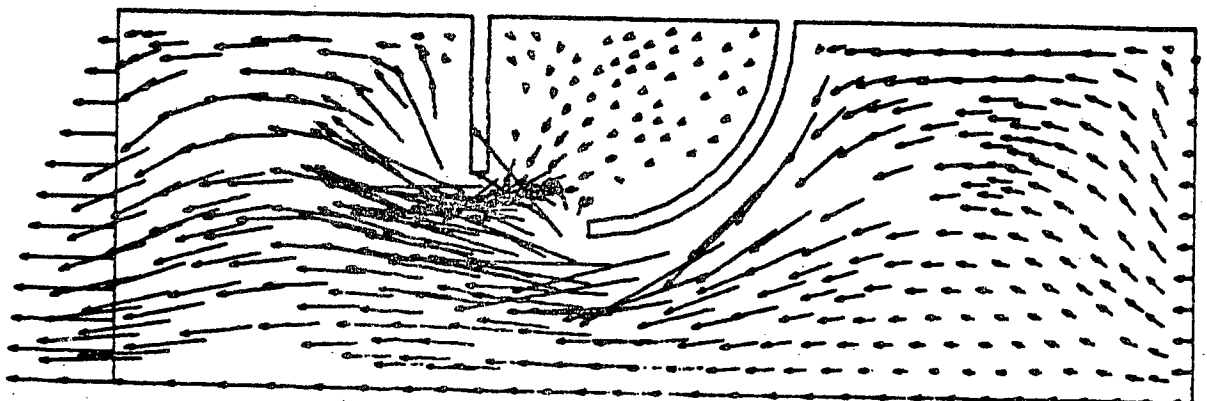
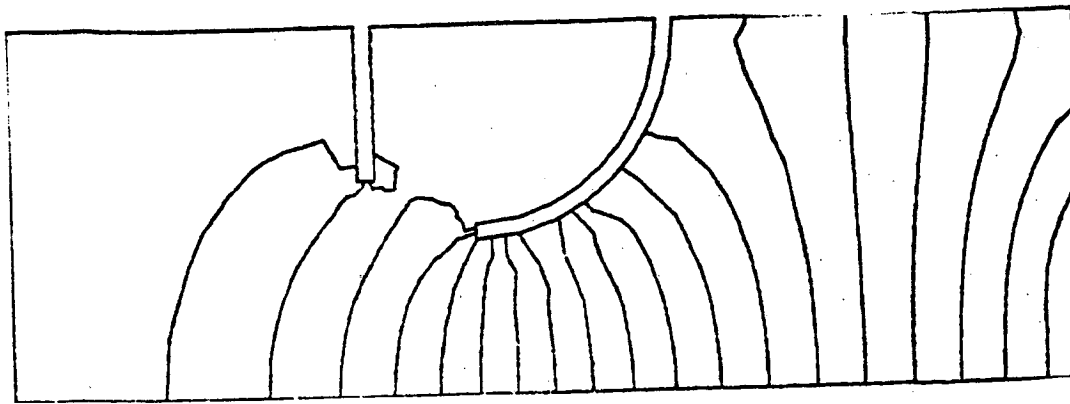
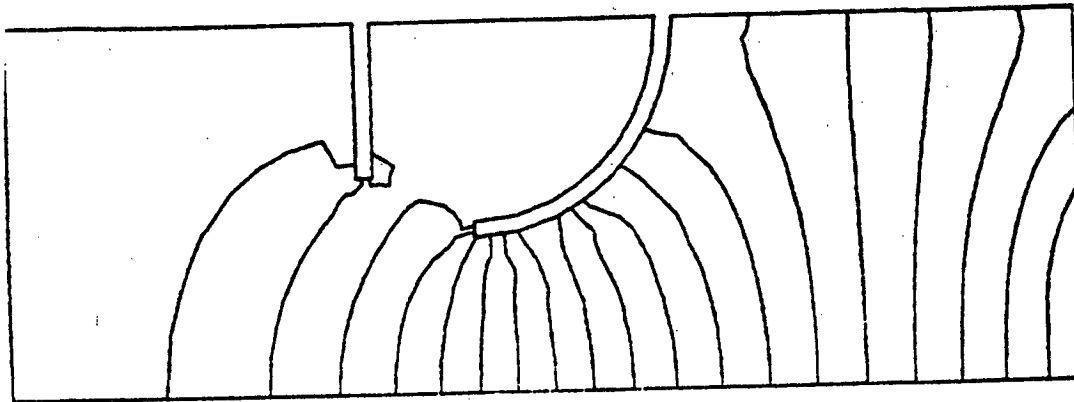


Figure 13.a

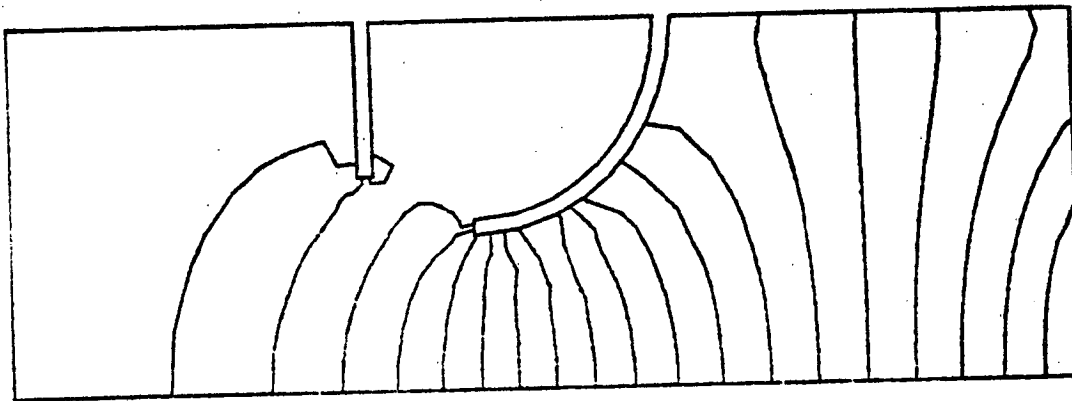
Débit au temps $t = 9$ heures



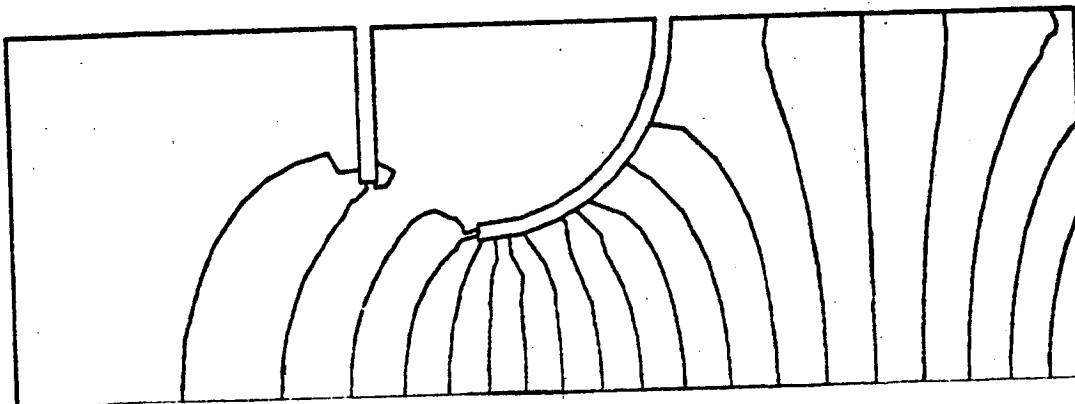
Test 2



Test 3



Test 4



Test 5

Figure 13.b
Hauteur d'eau au temps $t =$

Résultat des tests cas b.

L'inconnue est alors la composante temporelle de la répartition des vitesses horizontales en entrée et/ou en sortie ; les conditions aux limites sur les frontières maritimes verticales sont de la forme :

$$q(x,y,t) = \begin{cases} f(x,t) g(y), \\ 0, \end{cases}$$

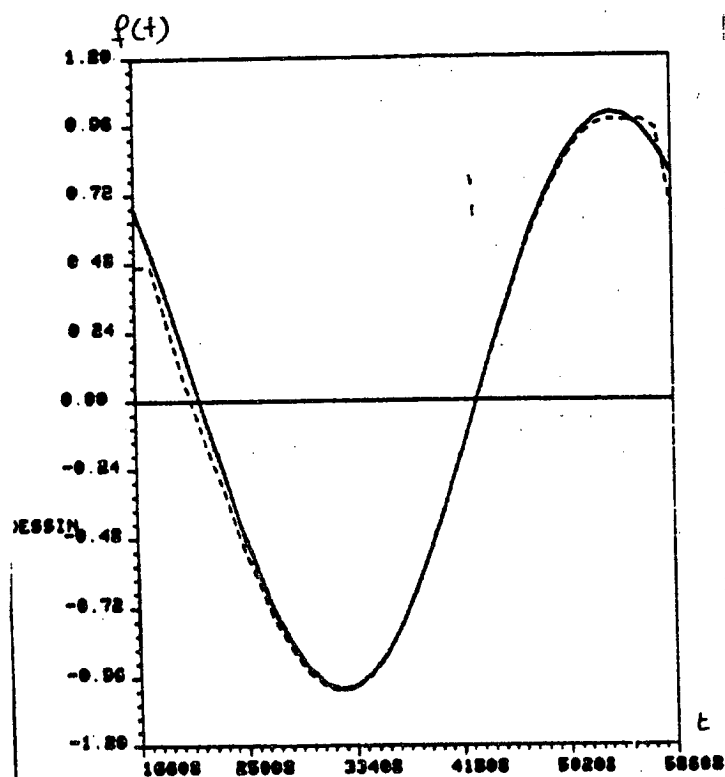
où $f(x,t)$ est une fonction inconnue. On a cherché d'abord à identifier cette fonction sur l'une des deux frontières (ceci conduit, après discrétisation en temps à $N=36$ inconnus discrètes), puis sur les deux frontières simultanément ($2 \cdot N = 72$ inconnues discrètes);

Dans le premier cas, une observation par pas de temps suffit à assurer l'existence et l'unicité de la solution d'identification ; dans le second cas, il faut deux observations pour avoir cette propriété :

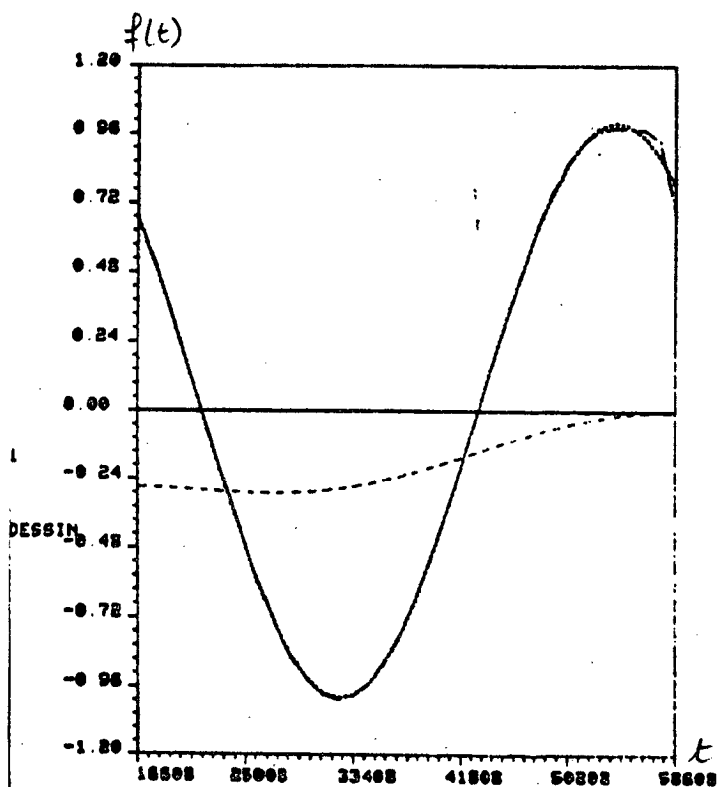
N° test	I/O	Initialisation	Position des capteurs	R Nobs/ Nnq	Nbre d'itérations	Convergence J_n / J_0
1	I	Zéro*	4 sur Q_1	1	6	$5.2 \cdot 10^{-8}$
2	I	Zéro	4 sur h	1	10	$5.5 \cdot 10^{-6}$
3	I	$-f_{ex}(0,t)**$	4 sur Q_1	1	6	$5.1 \cdot 10^{-8}$
4	I	$-f_{ex}(0,t)$	4 sur h	1	10	$5.5 \cdot 10^{-6}$
5	O	$-f_{ex}(x_{max},t)$	4 sur Q_1	1	6	$6.1 \cdot 10^{-7}$
6	I/O	Zéro	4 sur Q_1	0.5	6	$5.2 \cdot 10^{-8}$
7	I/O	Zéro	4 sur Q_1 et h	1	10	$2.5 \cdot 10^{-5}$
8	I/O	Zéro	2 et 6 sur Q_1	1	4	$8.3 \cdot 10^{-9}$
9	I/O	Zéro	4 sur h	0.5	10	$2.6 \cdot 10^{-7}$

* Initialisation de f par la fonction identiquement nulle

** Initialisation de f en opposition de phase.



Test 1 $x = 0$. La solution exacte et la solution convergée coïncident
Figure 14.1



Test 2 $x = 0$
Figure 14.2

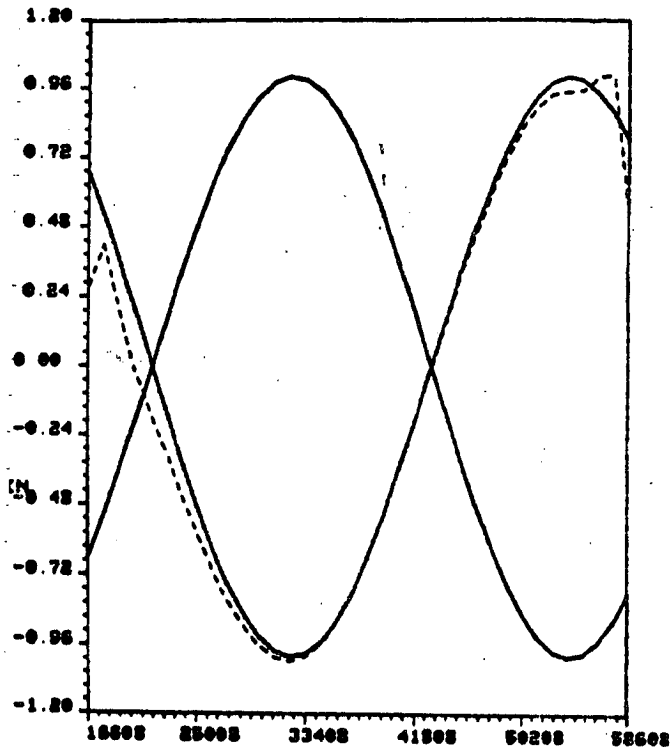
Test 3 $x = 0$

Figure 14.3

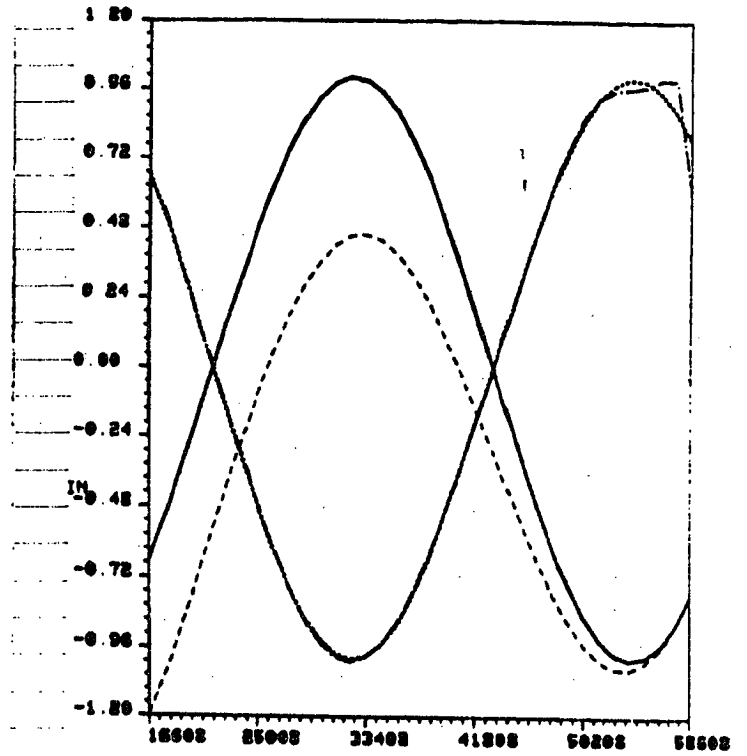
Test 4 $x = 0$

Figure 14.4

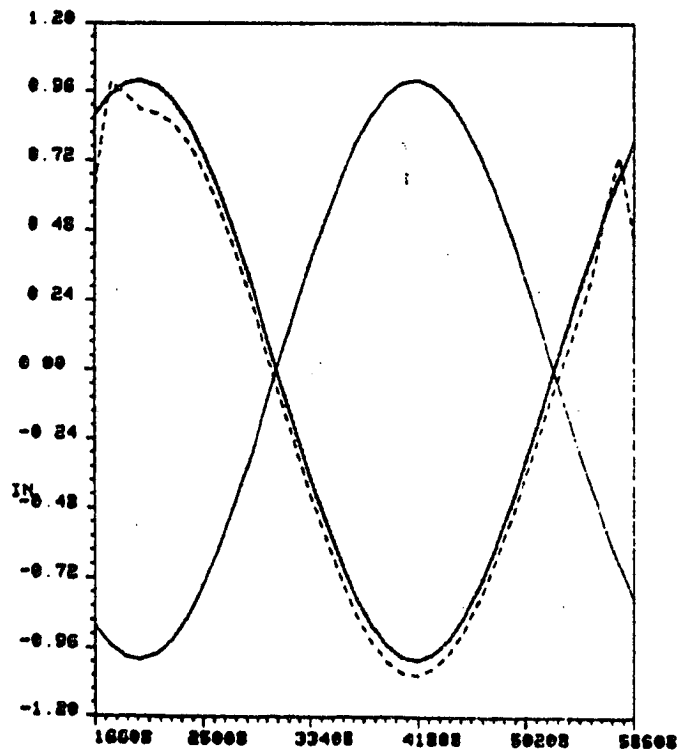
Test 5 $x = x_{\max}$

Figure 14.5

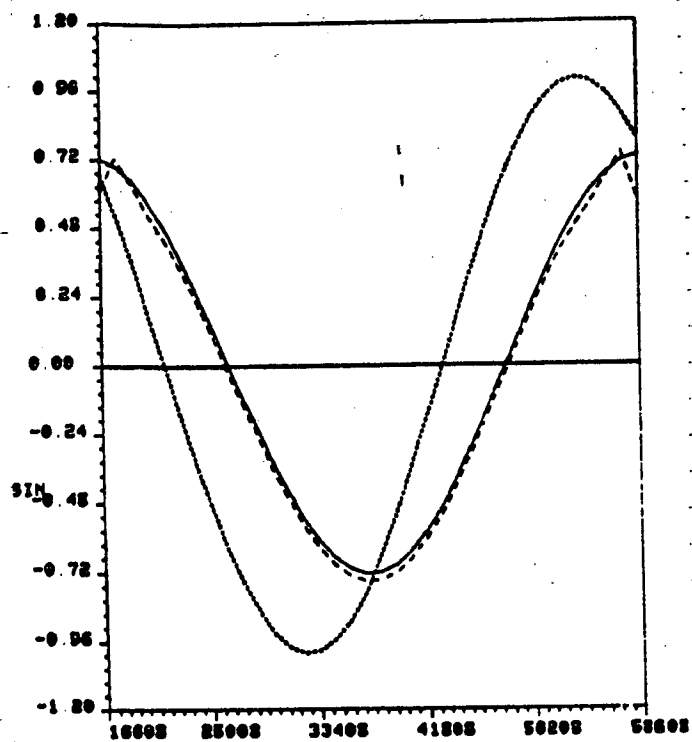
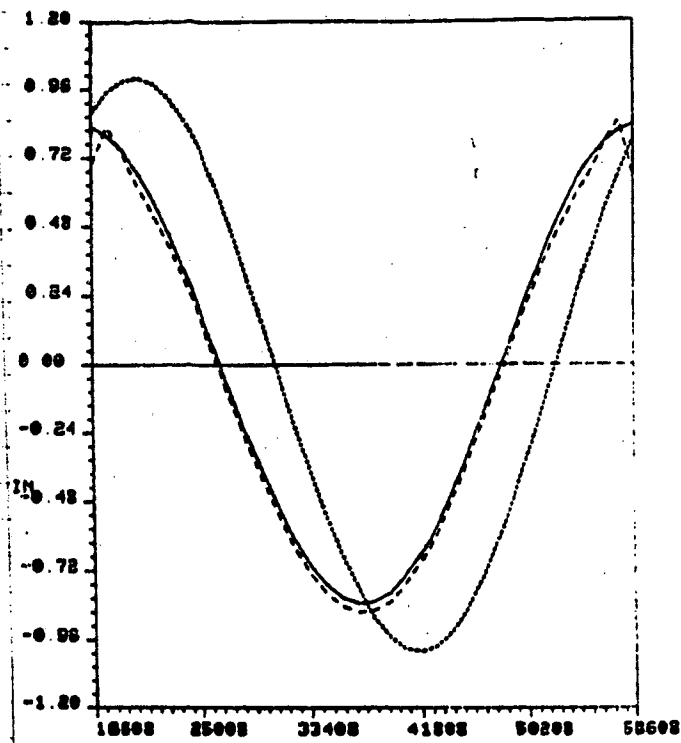
Test 6 $x = 0$ Test 6 $x = x_{\text{max}}$

Figure 14.6

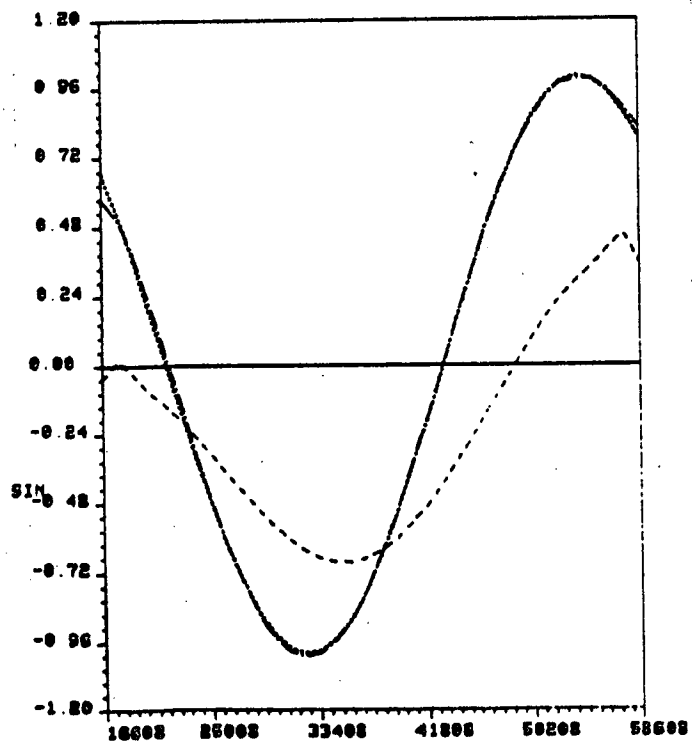
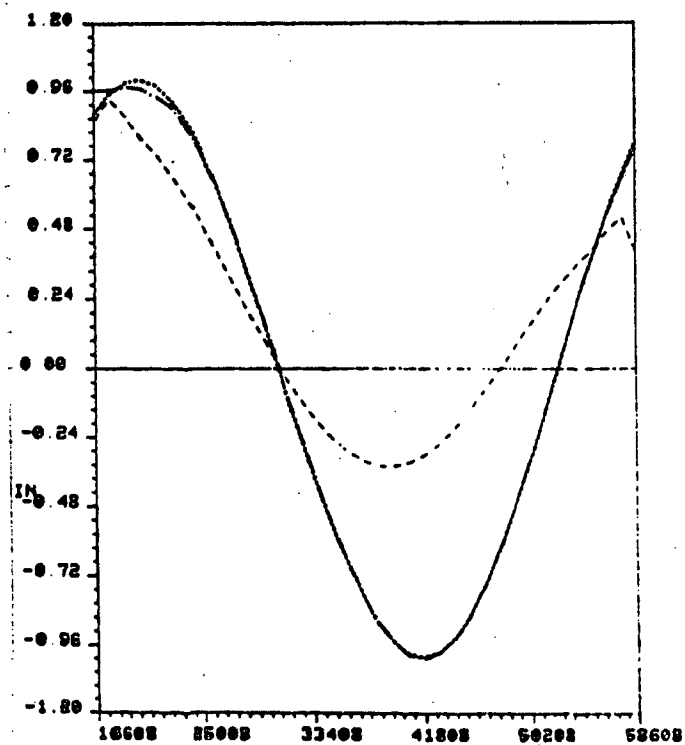
Test 7 $x = 0$ Test 7 $x = x_{\text{max}}$

Figure 14.7

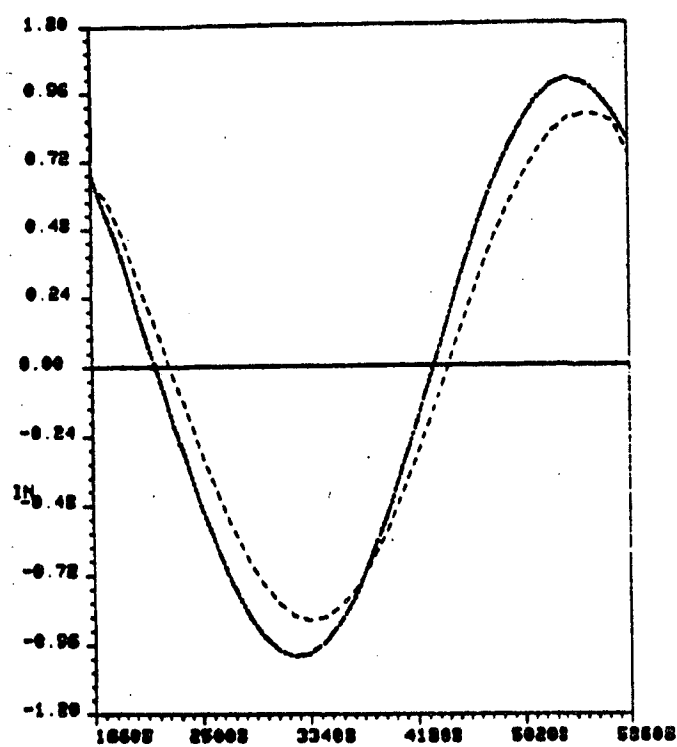
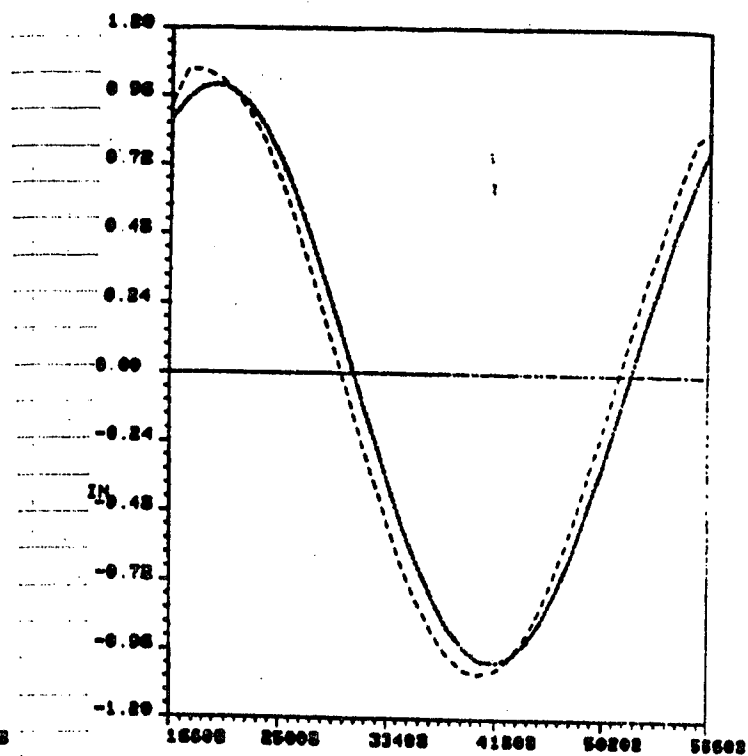
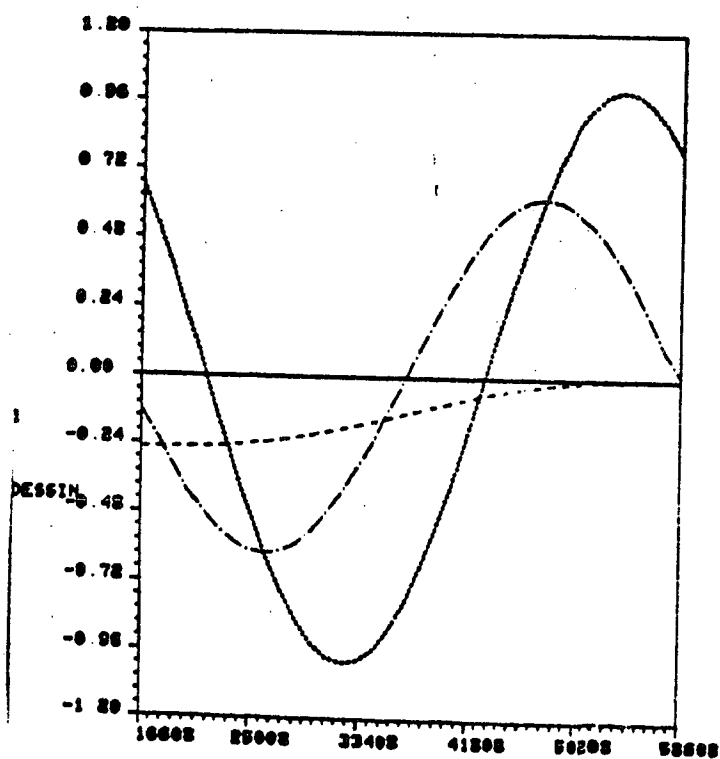
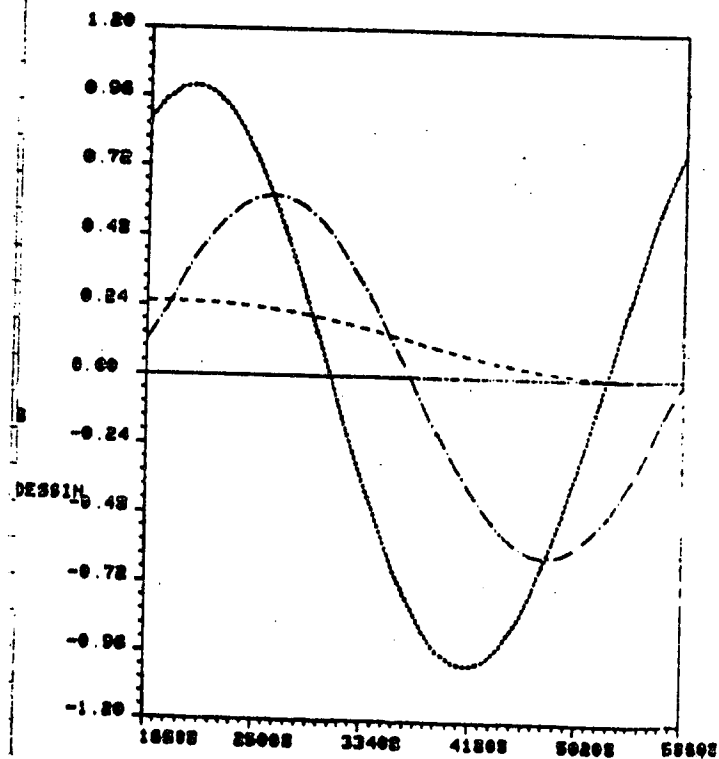
Test 8 $x = 0$ Test 9 $x = x_{\max}$

Figure 14.8

 $x = 0$  $x = x_{\max}$

Test 9

Figure 14.9

Sur les figures 14, on a représenté l'évolution des valeurs de f en fonction du temps, à l'initialisation, à la première itération et à la dernière itération, et ceci pour la ou les frontières considérées.

De façon purement qualitative, on peut observer que les tests qui ont fourni la meilleure restitution du profil de f , sont ceux où l'observation portait sur la composante horizontale du débit et que les résultats sont d'autant meilleurs si les capteurs sont proches des frontières. De plus, il apparaît clairement qu'une seule observation sur Q_1 ne suffit pas à restituer correctement le profil à la fois en entrée et en sortie. Par contre il semble une fois de plus que l'initialisation du processus itératif joue un rôle assez faible sur la qualité de la convergence.

Résultats des tests cas c.

Nous cherchons ici les conditions aux limites sur la forme :

$$q_1(x,y,t) = f(x,t) \cdot (ay^2 + by + c),$$

où f est donnée et a, b, c sont des coefficients réels inconnus et constants. Il n'y a donc que 3 inconnues discrètes ; on observe donc qu'une composante de la solution en un seul capteur. Pour les trois tests effectués, on a choisi d'initialiser les trois constantes à zéro. Le problème était encore linéaire, les seules modifications à effectuer dans les programmes numériques sont les calculs du gradient qui s'obtiennent en écrivant :

$$\delta q_1(x,y,t) = f(x,t) (\delta a \cdot y^2 + \delta b \cdot y + \delta c).$$

N° test	Position des capteurs	R=Nobs/ Nnq	Nbre d'itérations	Convergence n J / J°
1	2 sur Q_1	12	6	1.55 10 ⁻¹³
2	4 sur Q_1	12	2	5.5 10 ⁻¹³
3	2 sur Q_2	12	10	2.7 10 ⁻¹¹

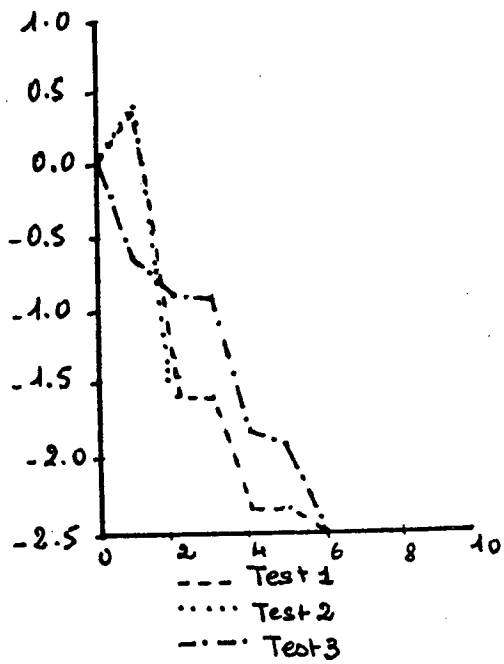


Figure 15.a

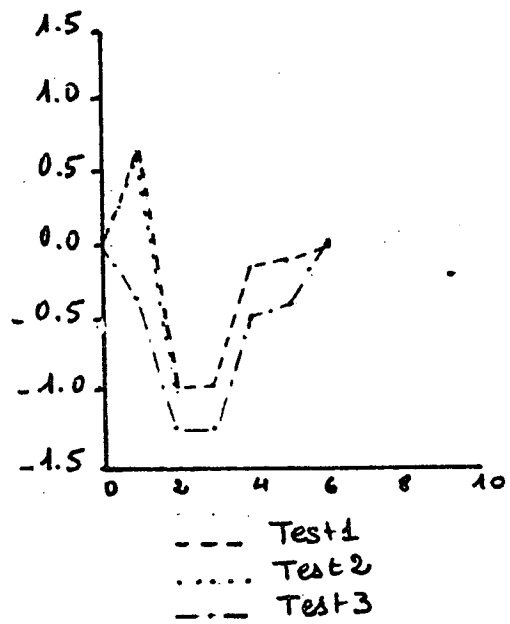


Figure 15.b

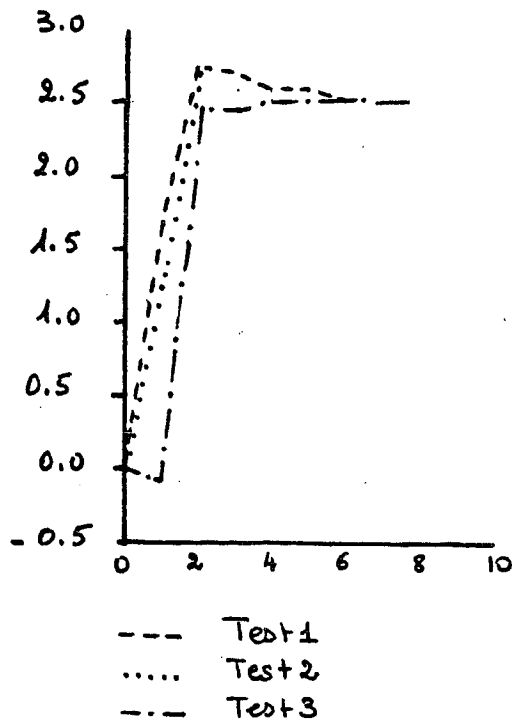


Figure 15.c

Pour les tests 1 et 3, l'algorithme converge vers la solution attendue, à savoir $(a,b,c) = (-2.5, 0.0 ; 2.5)$. Dans le cas du test 2, l'algorithme converge très rapidement vers une solution très différente (voir à la figure 15, les valeurs des trois constantes au cours des itérations). On remarquera néanmoins que la somme des trois constantes est conservée, approximativement. Ce phénomène de convergence vers une autre solution est probablement dû au fait que la convergence n'est pas correctement obtenue dans le cas du test 2 puisque le capteur est situé loin des frontières d'identification.

Resultat des tests cas d

Dans ce cas, on recherche à la fois la composante temporelle de q_1 et les coefficients réels a,b,c mentionnés au cas c. La fonctionnelle J est alors de degré quatre. Outre les difficultés déjà mentionnées et relatives au caractère non quadratique de la fonctionnelle J , nous avons rencontré les problèmes suivants :

La fonctionnelle J a un point singulier isolé : si $f=0$ et $(a,b,c) = \{0,0,0\}$, le gradient de J est identiquement nul bien que J n'admette pas d'extrémum local. L'initialisation par zéro n'est donc pas possible. De plus, l'espace des solutions doit être "quotienté" par l'espace des constantes. Si (f,a,b,c) est solution, $(\alpha f, a/\alpha, b/\alpha, c/\alpha)$ est solution, quelque soit le paramètre α réel.

Enfin, les résultats qui suivent, montrent que la convergence de l'algorithme assure, en général, une bonne restitution de la composante temporelle mais des résultats très médiocres en ce qui concerne la restitution des coefficients (a,b,c) , à moins d'utiliser un nombre important ($R > 1$) de points d'observations. Une fois de plus, on constate que la convergence peut être très bonne ($J^n/J^* < 10^{-9}$) sans que le profil soit correctement restitué.

Si on compare ces résultats avec ceux du test cas a., il semble préférable de rechercher le profil sous forme libre (temps calcul inférieurs, linéarité du processus) que sous la forme considérée dans ce test. (cas d.).

N° Test	Initialisation	Position des capteurs allumés	R	Nit	J^n / J_0	Restitution de f	valeurs de a,b,c N = Nit
1	f=0 a,b,c exacts (a=-2.5, b=0, c=25)	2 et 6 sur Q_1	0.96	10	$3.7 \cdot 10^{-7}$	Excellente (Figure 16.1)	- 2.45 0.07 2.47
2	f=0 a,b,c exacts	6 en Q_1	0.48	5	$6.6 \cdot 10^{-11}$	Mauvais en entrée (Figure 16.2)	- 2.50 $1.6 \cdot 10^{-4}$ 2.5
3	f=0 a=0, b=1, c=2	6 en Q_1	0.48	4	$4.1 \cdot 10^{-11}$	Mauvais en entrée (Figure 16.3)	0 1 2
4	f=0 a=0, b=1, c=2	2 et 6 en Q_1	0.96	8	$3.6 \cdot 10^{-12}$	Déphasage et amplitude inf. (Figure 16.4)	- 0.053 0.938 2.04
5	f=0 en entrée f exact en sortie a=0, b=1, c=2	2 et 6 en Q_1	0.96	10	$8.6 \cdot 10^{-9}$	Amplitude inf. en I et 0 (Figure 16.5)	0.8 0.98 1.79
6	idem	2 et 6 en Q_1 et Q_2	1.92	10	$4.86 \cdot 10^{-5}$	Amplitude inf. en I et 0 (Figure 16.6)	- 1.84 - 0.72 2.71
7	f exact a=0, b=1, c=2	2 et 6 en Q_1	0.96	10	$2.65 \cdot 10^{-9}$	Amplitude sup. en I et 0 (Figure 16.7)	- 1.83 0.72 1.65
8	idem	1,3,5,7 en Q_1	1.92	10	$1.5 \cdot 10^{-4}$	Amplitude sup. en I et 0 (Figure 16.8)	1.82 0.62 2.54

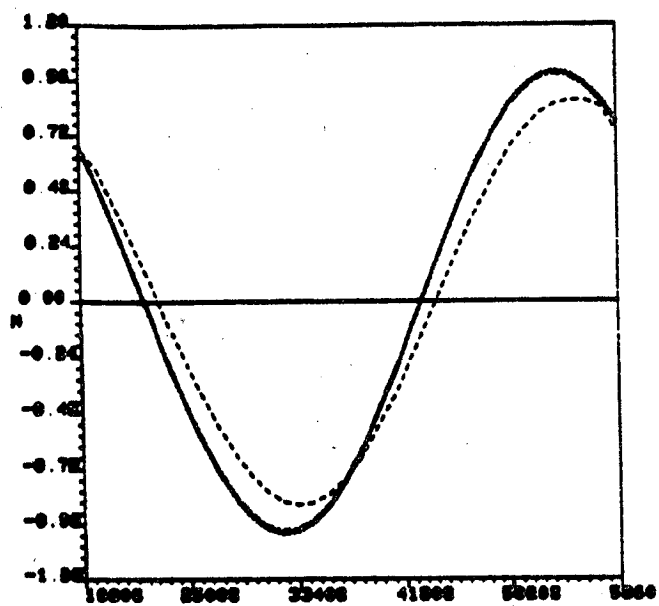


Figure 16.1.a

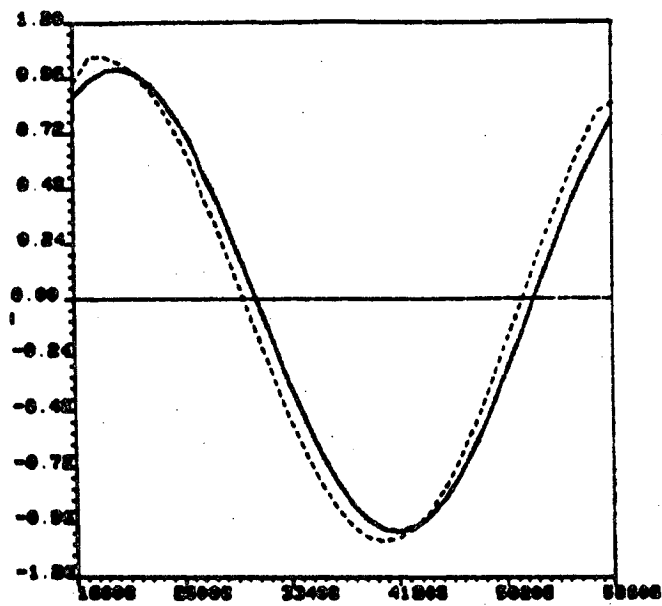


Figure 16.1.b

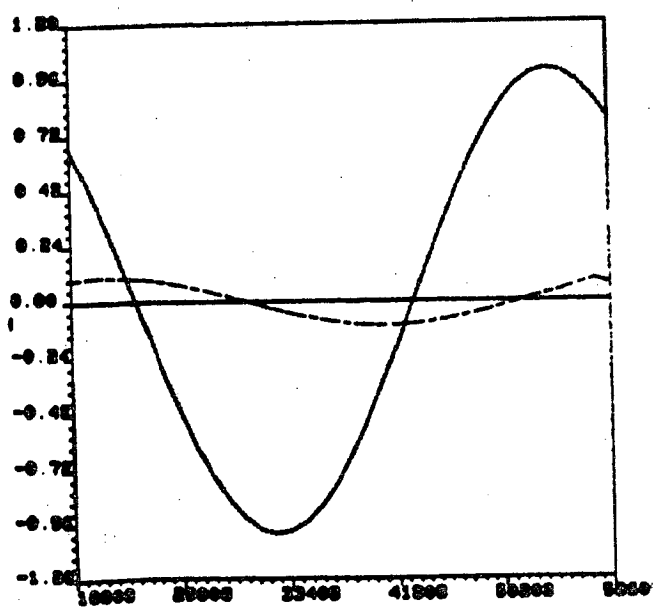


Figure 16.2.a

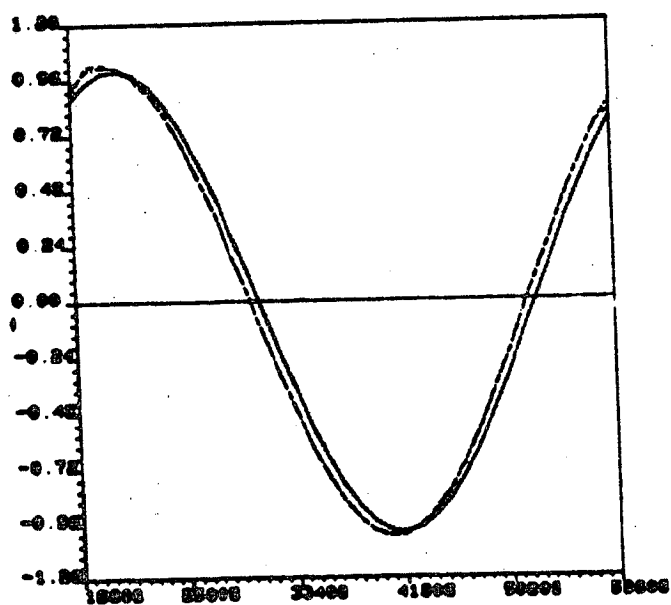


Figure 16.2.b

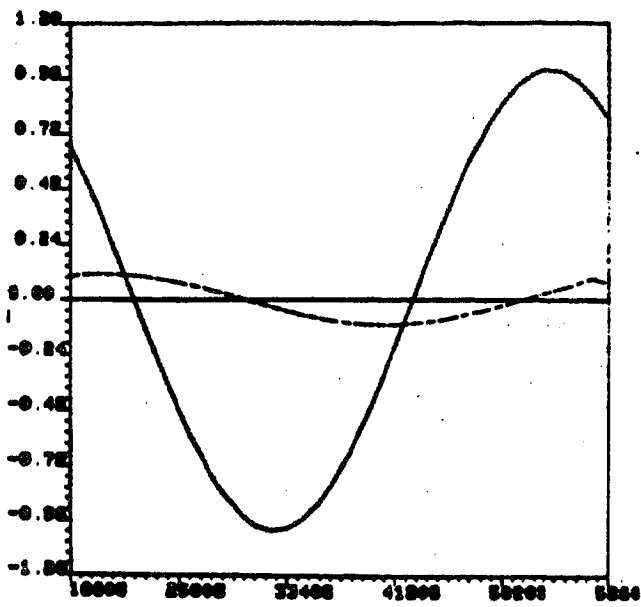


Figure 16.3.a

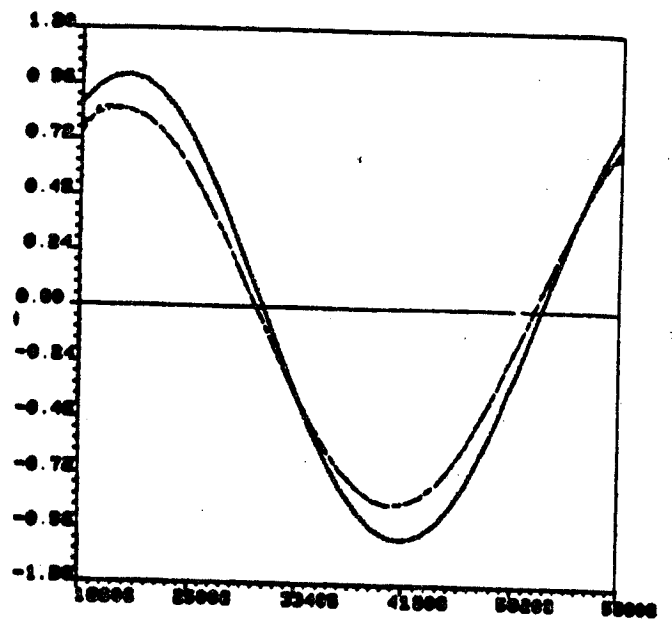


Figure 16.3.b

— Solution initiale
 Solution exacte
 ---- Iter = 1
 -.- Convergence

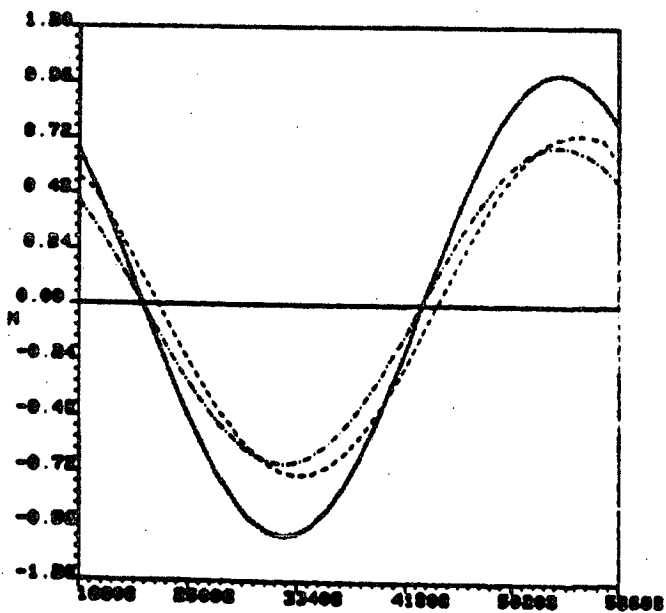


Figure 16.4.a

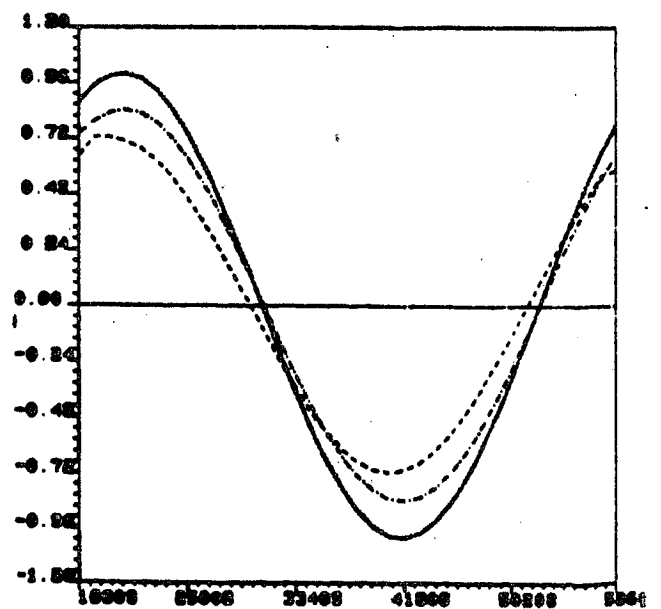


Figure 16.4.b

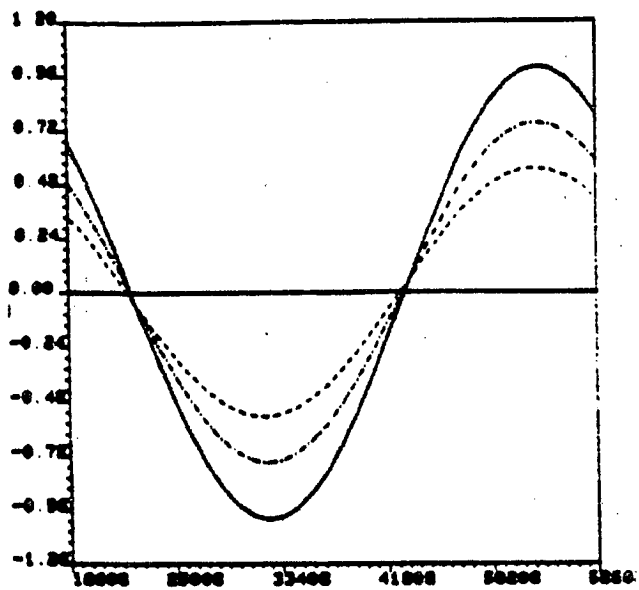


Figure 16.5.a

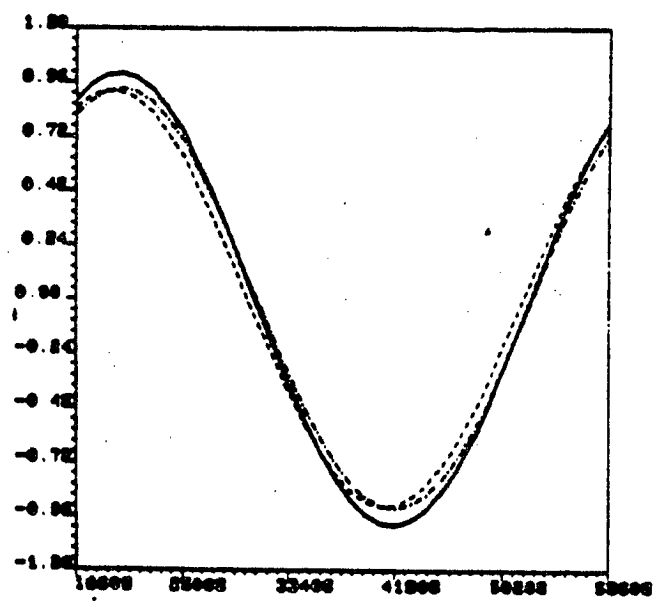


Figure 16.5.b

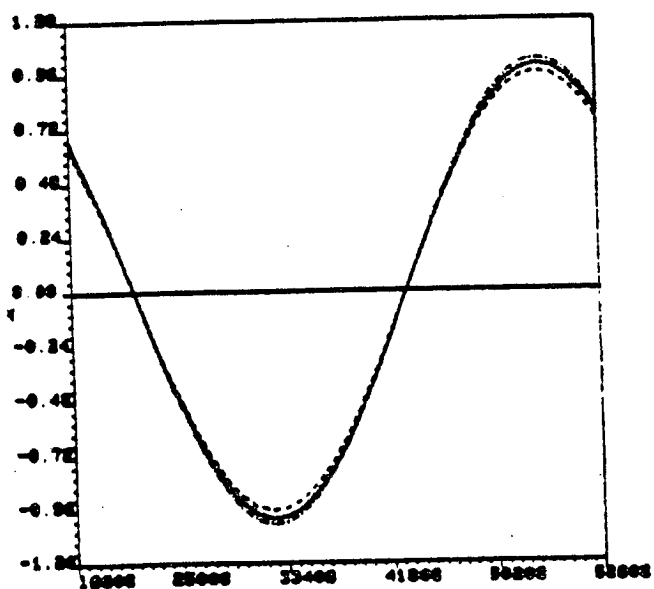


Figure 16.6.a

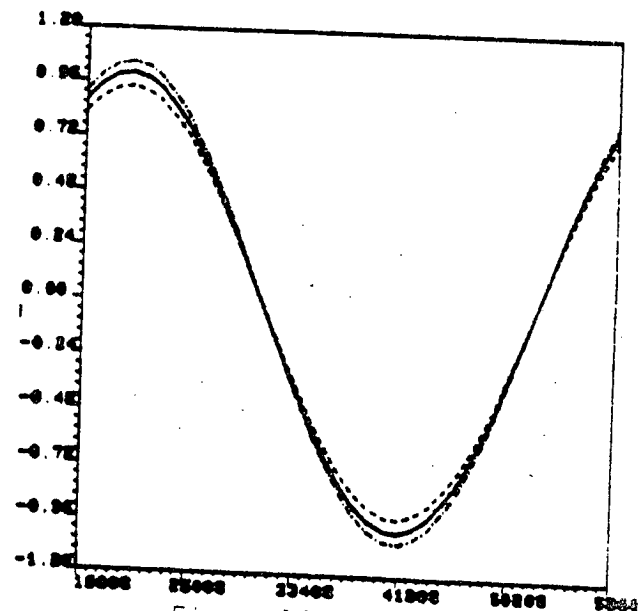


Figure 16.6.b

— Solution initiale
 Solution exacte
 ---- Iter = 1
 -.- Convergence

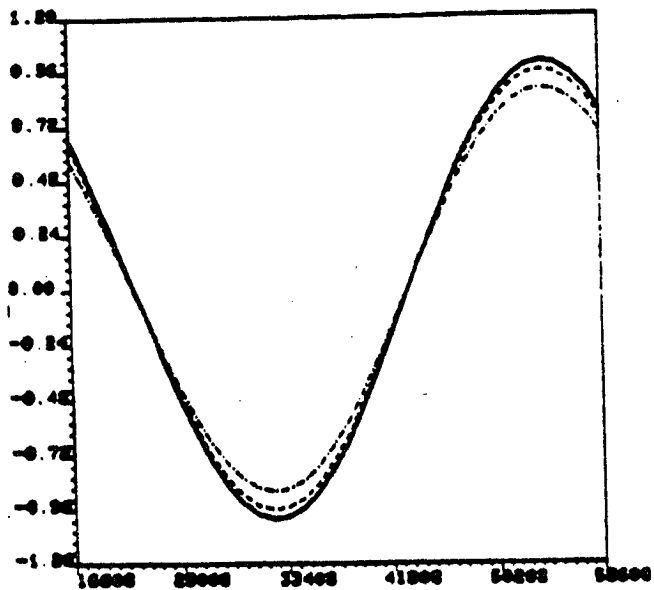


Figure 16.7.a

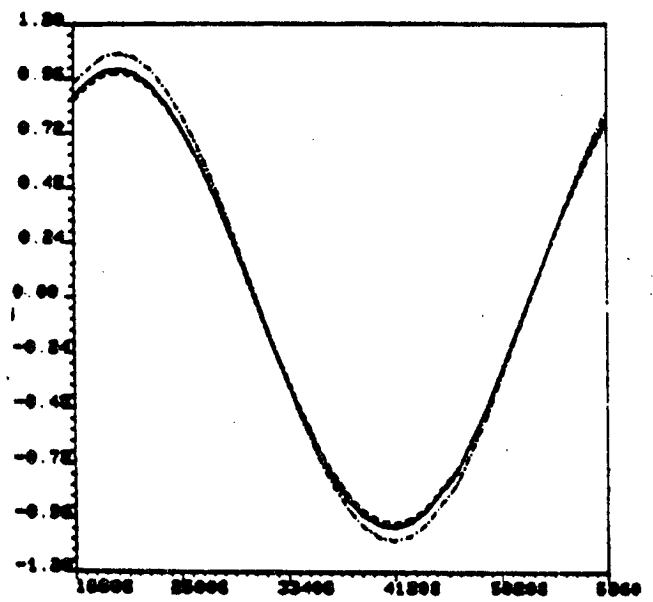


Figure 16.7.b

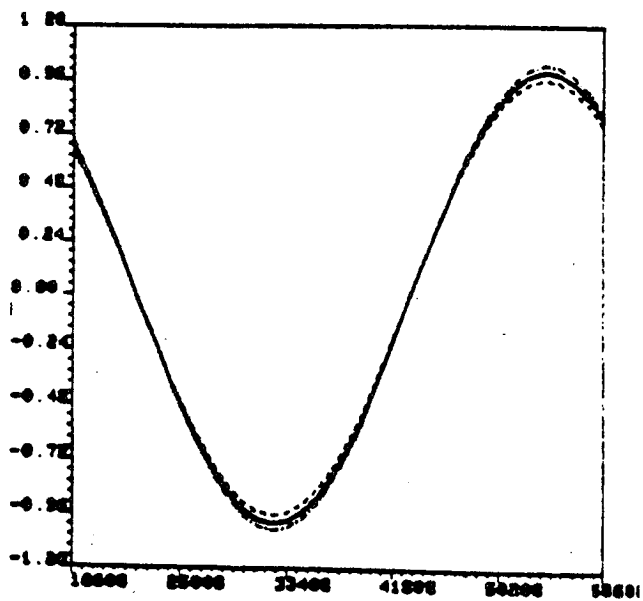


Figure 16.8.a

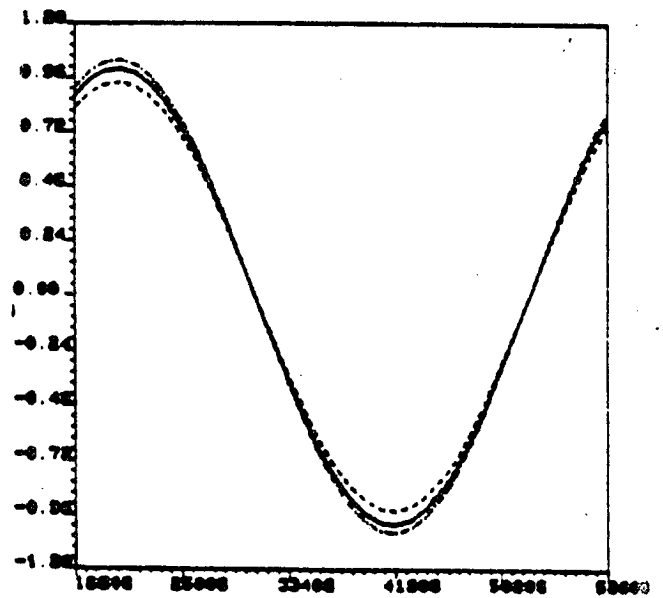


Figure 16.8.b

— Solution initiale
 Solution exacte
 --- Iter = 1
 -.-.- Convergence

Figures 16

Profil de la composante temporelle

En conclusion, les expériences que nous avons menées, permettent de faire les commentaires suivants :

1. Du point de vue de la convergence de la fonctionnelle, cette convergence est d'autant mieux et plus rapidement atteinte que le nombre d'observations est faible. Le choix de l'initialisation influe très peu dans la qualité de la convergence et même de la solution obtenue. Par contre, la solution obtenue à convergence est souvent très mauvaise par le choix médiocre des capteurs. Il semble donc que le test d'arrêt choisi devrait mieux refléter les caractéristiques physiques de la solution souhaitée par adjonction, par exemple d'une fonctionnelle de bord.

2. Du point de vue du nombre de capteurs, il apparaît clairement qu'il doit exister pour chaque cas particulier, un nombre optimal d'observations à effectuer pour assurer à la fois la convergence rapide et une bonne restitution des profils attendus (bonne qualité physique). Si la position des capteurs et les quantités observées sont bien choisies (cf. Point 3), le nombre optimal de capteurs est tel que le rapport R du nombre d'observations sur le nombre d'inconnues vaut approximativement 0.5. Si ce nombre R est inférieur à la valeur optimale, la solution obtenue peut être très lointaine de la solution physique. Si ce nombre est supérieur à R_{opt} , la convergence est plus lente sans amener de précision supplémentaire sur la solution.

3. La position optimale des capteurs et le choix optimal des quantités à observer est un problème difficile à résoudre. Il semble néanmoins que les capteurs doivent se trouver le plus près possible de la (des) frontières à identifier (voir test d.). De plus, les quantités à observer doivent être le plus proche possible des quantités à déterminer. (Ici observation et détermination de la composante horizontale du débit). Enfin, l'observation d'un point sur la hauteur d'eau améliore la solution sans détériorer la convergence du processus.

Enfin, l'introduction de l'étape de convection, non traitée ici, ne pose pas de problèmes sur le papier. Si la méthode des caractéristiques est choisie pour résoudre cette étape, il suffira d'intégrer les caractéristiques dans le sens inverse du temps. Pour ce qui est de la détermination du coefficient de diffusion, il faut souligner que la méthode de décomposition quasi directe pour la résolution du problème de diffusion propagation, ne peut être utilisée que lorsque ce coefficient est une constante en espace

(inversion des termes $\text{div}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K} \text{ div.}$). Dans ce cas, il faudrait utiliser une stratégie itérative (de type gradient conjugué) pour résoudre les problèmes de bord. Dans tout autre cas, il est impératif de rechercher une autre stratégie de résolution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAUBERT A., BENQUE J.P., Utilisation des modèles mathématiques pour l'étude de la réfrigération des centrales électriques installées en bord de mer, Rapport EDF, HC 041/75.24, Oct. 75.
- [2] DALSECCO S., LABADIE G., LATTEUX B., Résolution des équations de St Venant par une méthode d'éléments finis, Rapport EDF, HE 41/82.15 HE 42/82.34.
- [3] GOUSSEBAILE J., Modélisation d'écoulements et transfert de chaleur par une méthode de différences finies en mailles non orthogonales, Rapport EDF HE41/81.27.
- [4] HECHT F., REINHART L., Rapport intermédiaire du contrat 80/81.01.1101.1 (ED5300), Résolution numérique des équations de Saint Venant par la méthode des éléments finis, 1982.
- [5] GOUSSEBAILE J., HECHT F., LABADIE G., REINHART L., Finite element solution of the shallow water equations by a quasi direct décomposition procedure, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, 1117-1136, 1984.
- [6] YANENKO N.N., The method of fractional steps, Springer, New-York, 1971.
- [7] GLOWINSKI R., Numerical mehtods of fractional steps, Springer Verlag, New York, 1984.
- [8] GLOWINSKI R., PIRONNEAU O., Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem, SIAM Review, Vol. N° 21, n° 2, April 79.
- [9] BENQUE J.P., IBLER B., KERAMSI A., LABADIE G., A finite element method for the Navier equations. 3rd International conference on Finite Elements in Flow Stokes Problems, Banff, Alberta, Canada 10-13 June, 1980.
- [10] LABADIE G., BENQUE J.P., RONAT J., Un nouvelle méthode d'éléments finis pour les équations de navier-Stokes couplées avec une équation thermique. Rapport EDF HE41/83.10, soumis à International Journal for Numerical Methods in Fluid.
- [11] BRISTEAU M.O., DIMOYAT B., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., PIRONNEAU O., Finite element methods for the

compressible Navier-Stokes equations, AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, DANVERS July 13-15 1983.

- [12] IBLER B., Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode d'éléments finis. Thèse de Doctorat de l'Université Paris Sud, Janvier 1981.
- [13] PIRONNEAU O., On the transport diffusion Algorithm and its application to Navier Stokes equations, Num. Math., 38 pp.309-332 (1982).
- [14] LIONS J.L., Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, 1968.
- [15] CHAVENT G., Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles, Thèse d'Etat, Faculté des sciences de Paris.
- [16] LIONS J.L., Some methods in the mathematical analysis of systems and their control, 1984.
- [17] POLAK E., Computational methods in optimization. A unified approach Mathematics in Science and Engineering, New York, London, Academic Press.
- [18] HECHT F., Allocation dynamique, A French contribution to INTERLIB, June 82.

Annexe 1Le problème adjoint pour le système dual
Conditions aux limites de type Neumann

On reprend les notations du paragraphe 3, où on change toutes les conditions aux limites de type Dirichlet en conditions de type Neumann.

L'équation de bord (42) "linéarisée" s'écrit encore :

$$(A1.1) \quad \delta \lambda^{n+1} = A^{-1} \delta B^{n+1} = A^{-1} (B_1 \delta q^{n+1} + B_2(h^n) \delta h^n + B_3 \delta Q^n),$$

où A est ici l'opérateur de bord associé aux conditions de Neumann :

$$\forall x \in H^{1/2}(\Gamma), \forall y \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$(A1.2) \quad \langle A x, y \rangle_{H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)} = \int_{\Omega} D \psi_x y \, d\Gamma,$$

avec

$$(A1.3) \quad a_1(z_x, v) = \int_{\Omega} D x v \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Gamma),$$

$$(A1.4) \quad a_2(Q_x, v) = - \int_{\Omega} C^2 \nabla Z_x \cdot v \, dx, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^2,$$

$$(A1.5) \quad a_1(\psi_x, v) = \int_{\Omega} C^2 (\alpha Z_x + \operatorname{div} Q_x) v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega);$$

et où, si on calcule $\delta B^{n+1} \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$(A1.6) \quad \langle \delta B^{n+1}, y \rangle_{H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)} = - \int_{\Omega} D \delta \psi_o^{n+1} y \, d\Gamma, \quad \forall y \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

avec : pour $v \in H^1(\Omega)$, $v \in (H^1(\Omega))^2$,

$$(A1.7) \quad a_1(\delta Z_o^{n+1}, v) = \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta z^n v + K \alpha \nabla \delta z^n \nabla v - \operatorname{div}(\alpha \delta Q^n + \delta U^n) v) \, dx,$$

$$(A1.8) \quad a_2(\delta Q_o^{n+1}, v) = - \int_{\Omega} C^2 \nabla \delta z_o^{n+1} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} (\alpha \delta Q^n + \delta U^n) v \, dx \\ + \int_{\Omega} D \delta q^{n+1} \cdot v \, d\Gamma,$$

$$(A1.9) \quad a_1(\delta \psi_0^{n+1}, v) = \int_{\Omega} C^2(\alpha \delta Z_0^{n+1} - \alpha \delta z^n + \operatorname{div}(\delta Q_0^{n+1})) v \, dx ;$$

Prenons les équations linéarisées, dans lesquelles on choisit comme fonction test les vecteurs adjoints et sommons sur le pas de temps n ; il vient :

$$(A1.10) \quad a_1(\delta h^{n+1}, r^{n+1}) = \int_{\Omega} \{ \alpha \delta h^n r^{n+1} + K \alpha \nabla \delta h^n \nabla r^{n+1} - \operatorname{div}(\delta U^n + \alpha \delta Q^n) r^{n+1} \} dx \\ + \int_{\Gamma} D \delta \lambda^{n+1} r^{n+1} d\Gamma,$$

$$(A1.11) \quad a_2(\delta Q^{n+1}, s^{n+1}) = \int_{\Omega} (-C^2 \nabla \delta h^{n+1} \cdot s^{n+1} + (\alpha \delta Q^n + \delta U^n) \cdot s^{n+1}) dx \\ + \int_{\Gamma} K \delta q^{n+1} \cdot s^{n+1} d\Gamma,$$

et par sommation, et avec l'expression de $\delta \lambda^{n+1}$,

$$\sum_{n=1}^N \{ a_1(\delta h^{n+1}, r^{n+1}) - \int_{\Omega} (\alpha^2 \delta h^n r^{n+1} + K \alpha \nabla \delta h^n \nabla r^{n+1} - \operatorname{div}(\alpha \delta Q^n + \delta U^n) r^{n+1}) dx \\ - \int_{\Gamma} D A^{-1} (B_1 \delta q^{n+1} + B_2(h^n) \delta h^n + B_3 \delta Q^n) r^{n+1} d\Gamma + a_2(\delta Q^{n+1}, s^{n+1}) \\ + \int_{\Omega} (C^2 \nabla \delta h^{n+1} \cdot \alpha \delta Q^n - \delta U^n) \cdot s^{n+1} - \int_{\Gamma} K \delta q^{n+1} \cdot s^{n+1} d\Gamma = 0 ;$$

On reordonne les différents termes en δh^{n+1} , δQ^{n+1} , δq^{n+1} ; d'où après avoir décaler les indices, éventuellement :

$$(A1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N \{ a_1(r^{n+1}, \delta h^{n+1}) - \int_{\Omega} (\alpha^2 r^{n+2} \delta h^{n+1} + K \alpha \nabla r^{n+2} \nabla \delta h^{n+1} - \operatorname{div}(\delta U^{n+1}) r^{n+2} \\ - C^2 \nabla \delta h^{n+1} \cdot s^{n+1} + \delta U^{n+1} \cdot s^{n+2}) dx - \int_{\Gamma} D A^{-1} B_2(h^{n+1}) \delta h^{n+1} d\Gamma \} \\ + \sum_{n=1}^N \{ a_2(s^{n+1}, \delta Q^{n+1}) - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\alpha \delta Q^{n+1}) r^{n+2} + \alpha \delta Q^{n+1} \cdot s^{n+2}) dx - \\ - \int_{\Gamma} D A^{-1} B_3(\delta Q^{n+1}) r^{n+2} d\Gamma \} \end{array} \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N - \int_{\Gamma} (DA^{-1} B_1 (\delta q^{n+1}) r^{n+1} + K \delta q^{n+1} \cdot s^{n+1}) d\Gamma = 0$$

Les équations adjointes sont alors établies de telle sorte qu'elles égalisent l'expression du gradient avec les deux premiers termes de l'expression ci dessus ; avec l'expression du gradient, en (66), il vient, en substituant δh^{n+1} (resp.. δQ^{n+1}) par une fonction test v (resp. v) :

$$(A1.13) \left\{ \begin{aligned} a_1(r^{n+1}, v) &= \int_{\Omega} \{ \alpha^2 r^{n+2} v + K \alpha \nabla r^{n+2} \nabla v - \text{div}(g(h_m - h^{n+1}) \nabla v - g v \nabla h^{n+1}) r^{n+2} \\ &\quad - C^2 s^{n+1} \cdot \nabla v + (g(h_m - h^{n+1}) \nabla v - g v \nabla h^{n+1}) \cdot s^{n+2} \} dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} DA^{-1} (B_2(h^{n+1}) v) r^{n+2} d\Gamma \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \{ \chi_{i,n+1}^z (h^{n+1}(x_i) - (h_d^{n+1})_i) v(x_i) \} \end{aligned} \right.$$

et

$$(A1.14) \left\{ \begin{aligned} a_2(s^{n+1}, v) &= \int_{\Omega} (\text{div}(\alpha v) r^{n+2} + \alpha s^{n+1} \cdot v) dx + \int_{\Gamma} DA^{-1} B_3(v) r^{n+2} d\Gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 \chi_{i,n+1}^{Q_k} (Q_k^{n+1}(x_i) - (Q_{k,d}^{n+1})_i) v_k(x_i), \end{aligned} \right.$$

quelque soit $v = (v_1, v_2)$ dans $(H^1(\Omega))^2$;

Après sommation sur n , on obtient ; en utilisant l'équation (A1.12)

$$J'(q) \delta q = \sum_{n=1}^N - \int_{\Omega} (DA^{-1} B_1 (\delta q^{n+1}) r^{n+1} + K \delta q^{n+1} \cdot s^{n+1}) d\Gamma,$$

qui ne dépend plus que de l'expression δq et des vecteurs adjoints. Pour avoir une expression facile à calculer, il reste à trouver les opérateurs adjoints de B_1 , B_2 , B_3 et A ; ce qui permet d'évaluer les expressions :

$$\int_{\Gamma} D(A^{-1} B_2(h^{n+1}) v) r^{n+2} d\Gamma = \int_{\Gamma} {}^t B_2 (h^{n+1}) {}^t A^{-1} (D r^{n+2}) v d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma} D(A^{-1}B_3 v) r^{n+2} d\Gamma = \int_{\Gamma} {}^tB_3 {}^tA^{-1}(D r^{n+2}) \cdot v d\Gamma,$$

$$\text{et } J'(q)\delta q = \sum_{n=1}^N - \int_{\Gamma} ({}^tB_1 {}^tA^{-1}(D r^{n+1}) + K s^{n+1}) \cdot \delta q^{n+1} d\Gamma.$$

A chaque pas de temps, on inversera donc le système :

$$(A1.15) \quad {}^tA \cdot \mu^{n+2} = D r^{n+2}, \mu^{n+2} \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ (cf. Etape (A.5))}$$

puis on calculera les termes ${}^tB_1 \mu^{n+2}$, ${}^tB_2 \mu^{n+2}$ et ${}^tB_3 \mu^{n+2}$ pour les ajouter aux seconds membres des équations adjointes et à l'expression du gradient. C'est l'objet des équations (63)-(64)-(65) dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet. Dans notre cas particulier des conditions de Neumann, on peut trouver de manière naturelle les expressions des opérateur tB_1 , ${}^tB_2(h^n)$ et tB_3 . En effet :

$$(A1.16) \quad B_1 \in L(H^{-1/2}(\Gamma))^2, H^{1/2}(\Gamma))$$

$$\text{avec } \langle B_1 x, y \rangle = - \int_{\Gamma} D \psi_1 y d\Gamma, \forall y \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

où ψ_1 est obtenu (à partir des équations (A1.7)-(A1.9) en prenant $\delta z^n = 0$ et $\delta Q^n = 0$) par :

$$(A1.17) \quad a_2(Q_1, v) = \int_{\Gamma} D x \cdot v d\Gamma, \forall v \in (H_1(\Omega))^2,$$

$$(A1.18) \quad a_1(\psi_1, v) = \int_{\Omega} C^2 \operatorname{div}(Q_1) v dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

$$\text{on a donc : } \langle B_1, x, y \rangle = - \int_{\Gamma} D \psi_1 y dx = - \int_{\Gamma} D \psi_1 T y dx = - a_1(\psi_1, T y)$$

où $T y$ est solution de :

$$(A1.19) \quad a_1(T y, v) = + \int_{\Gamma} D y v d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega).$$

En utilisant (A1.18) :

$$\langle B_1 x, y \rangle = -a_1(\psi_1, Ty) = - \int_{\Omega} C^2 \operatorname{div} (Q_1) Ty \, dx.$$

Soit maintenant Sy solution de :

$$(A1.20) \quad a_2(Sy, v) = \int_{\Omega} C^2 Ty \cdot \operatorname{div}(v) \, dx,$$

$$\langle B_1 x, y \rangle = -a_2(Sy, Q_1) = \int_{\Gamma} D x \cdot Sy \, d\Gamma ;$$

et donc $\langle B_1 x, y \rangle = \langle x, {}^t B_1 y \rangle$, qui implique

$$(A1.21) \quad {}^t B_1 y = D Sy|_{\Gamma}.$$

On agit de même pour $B_2(h^n)$:

$$(A1.22) \quad B_2(h^n) \in L(H^1(\Omega), H^{-1/2}(\Gamma))$$

$$\text{avec } \langle B_2(h^n) \cdot x, y \rangle = - \int_{\Gamma} D \psi_2^n y \, d\Gamma, \quad \forall y \in H^{-1/2}, \quad x \in H^1(\Omega)$$

où ψ_2^n est obtenu via la résolution de :

pour $v \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$,

$$(A1.23) \quad a_1(Z_2^n, v) = \int_{\Omega} \{ \alpha^2 x \cdot v + K \alpha \nabla x \cdot \nabla v - \operatorname{div}(g(h_m - h^n) \nabla x - g x \nabla h^n) v \} dx,$$

$$(A1.24) \quad a_2(Q_2^n, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} -C^2 \nabla Z_2^n \cdot \mathbf{v} + (g(h_m - h^n) \nabla x + g x \nabla h^n) \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$(A1.25) \quad a_1(\psi_2^n, v) = \int_{\Omega} C^2 (\alpha Z_2^n - \alpha x + \operatorname{div} (Q_2^n)) v \, dx.$$

On a donc : en utilisant successivement (A1.19) et (A1.25)

$$\langle B_2(h^n).x,y \rangle = -a_1(Ty, \psi_2^n) = - \int_{\Omega} C^2 (\alpha Z_2^n - \alpha x + \operatorname{div}(\mathbf{Q}_2^n)) Ty \, dx.$$

Soit maintenant Ry la solution de :

$$(A1.26) \quad a_1(Ry, v) = \int_{\Omega} C^2 (\alpha Ty v - \mathbf{S}y \cdot \nabla v) \, dx, \text{ il vient :}$$

$$\begin{aligned} \langle B_2(h^n).x,y \rangle = & -a_1(Ry, Z_2^n) - \int_{\Omega} C^2 \mathbf{S}y \cdot \nabla Z_2^n \, dx + \int_{\Omega} C^2 \alpha x Ty \, dx \\ & - \int_{\Omega} C^2 \operatorname{div}(\mathbf{Q}_2^n) Ty \, dx \end{aligned}$$

et en utilisant alors l'équation (A1.20) avec $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_2^n$ et (A1.22) avec $v = Ry$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle B_2(h^n).x,y \rangle = & - \int_{\Omega} \{ \alpha^2 x Ry + K \alpha \nabla x \cdot \nabla Ry - \operatorname{div}(g(h_m - h^n) \nabla x - g_x \nabla h^n) Ry \} \, dx \\ & - \int_{\Omega} C^2 \mathbf{S}y \cdot \nabla Z_2^n \, dx + \int_{\Omega} C^2 \alpha x Ty \, dx - a_2(\mathbf{S}y, \mathbf{Q}_2^n). \end{aligned}$$

Enfin, par (A1.24) :

$$\begin{aligned} \langle B_2(h^n).x,y \rangle = & - \int_{\Omega} \{ \alpha^2 x Ry + K \alpha \nabla x \cdot \nabla Ry - \operatorname{div}(g(h_m - h^n) \nabla x - g_x \nabla h^n) Ry \} \, dx \\ (A1.27) \quad & - \int_{\Omega} \{ g(h_m - h^n) \nabla x - g_x \nabla h^n \} \cdot \mathbf{S}y \, dx + \int_{\Omega} C^2 \alpha x Ty \, dx, \end{aligned}$$

qui s'écrit maintenant de façon complètement explicite en fonction de x .

En faisant des calculs similaires on trouverait :

$$B_3 \in L((H^1(\Omega))^2, H^{-1/2}(\Gamma))$$

$$(A1.28) \quad \langle B_3 \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\alpha \mathbf{x}) R \mathbf{y} + \alpha \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \mathbf{y}) \, dx.$$

En résumé, le schéma de résolution du problème adjoint est similaire à celui proposé dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet, à savoir :

Etape 1 Initialisation

Posons $r^{N+1} = R^{N+1} = T^{N+1} = 0, \mathbf{s}^{N+1} = \mathbf{S}^{N+1} = 0,$

Pour $n \leq N$, étant donnés les vecteurs $r^{n+1}, R^{n+1}, T^{n+1}, \mathbf{s}^{n+1}, \mathbf{S}^{n+1},$

Etape 2 Résolution des problèmes en \mathbf{s}^n et r^{n+1}

Trouver \mathbf{s}^n dans $(H^1(\Omega))^2$ tel que : (Voir les équations (A1.14) et (A1.28))

$$\left\{ \begin{aligned} a_2(\mathbf{s}^n, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \{ \operatorname{div}(\alpha \mathbf{v})(r^{n+1} - R^{n+1}) + \alpha(\mathbf{s}^{n+1} - \mathbf{S}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \} \, dx \\ &+ \sum_{i=1}^{\text{Nobs}} \sum_{k=1}^2 \chi_{i,n}^{Q_k} (Q_k^n(x_i) - (Q^n)_i) v_k(x_i), \\ \forall \mathbf{v} &= (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2, \end{aligned} \right.$$

Trouver r^n dans $H^1(\Omega)$ tel que : (voir les équations (A1.13) et (A1.27))

$$\left\{ \begin{aligned} a_1(r^n, v) &= \int_{\Omega} \{ \alpha^2 (r^{n+1} - R^{n+1}) v + K \alpha (r^{n+1} - R^{n+1}) \nabla v \cdot \operatorname{div}(g(h_m - h^n) \nabla v - g v \nabla h^n) (r^{n+1} - R^{n+1}) \\ &+ (g(h_m - h^n) \nabla v - g v \nabla h^n) \cdot (\mathbf{s}^{n+1} - \mathbf{S}^{n+1}) \} \, dx + \int_{\Omega} C^2 \alpha T^{n+1} v \, dx \\ &- \int_{\Omega} C^2 \mathbf{s}^n \cdot \nabla v \, dx + \sum_{i=1}^{\text{Nobs}} \chi_{i,n}^Z (z^n(x_i) - (z^n)_d) v(x_i). \end{aligned} \right.$$

Etape3 Evaluation du terme Dr^n dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (Voir A1.15)

Etape 4 Résolution du système auxiliaire

Inversion du système (A1.15)

Calcul de T^n, S^n, R^n solution de (A1.19), (A1.20) et (A1.26) où $y = \mu^n$ solution du système (A1.15).

Annexe 2 Schéma de résolution du problème d'identification
Cas du paragraphe 5.2.2. Recherche des conditions sous forme libre.

On reprend les notations du paragraphe 5.2. Le problème d'identification s'écrit donc :

Trouver $q_1 \in (H^{1/2}(\Gamma^*))^N$ tel que :

(A2.1) $J(q_1) \leq J(q), \forall q \in (H^{1/2}(\Gamma))^N$ où la fonctionnelle J est définie par :

$$J : (H^{1/2}(\Gamma^*))^N \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$J(q) = 1/2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{Nobs} \{ \chi_i^2 (h^n(x_i) - (h^n_d)_i)^2 + \chi_{i,n}^{Q,1} (Q_1^n(x_i) - (Q_{1,d})_i^n)^2 + \chi_{i,n}^{Q,2} (Q_2^n(x_i) - (Q_{2,d})_i^n)^2 \},$$

(A2.2)

et où $(h^n)_{n=1,N}$ et $(Q^n)_{n=1,N}$ sont les solutions du problème direct :

Etant donné h^* et Q^* solutions initiales, on résout pour $n = 1, N$ les deux problèmes suivants :

Trouver $h^n \in H^1(\Omega)$ tel que pour tout v dans $H^1_0(\Omega)$

$$(A2.3) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (\alpha^2 h^n v + D \nabla h^n \nabla v) \, dx = \int_{\Omega} (\alpha^2 h^{n+1} v + K \alpha h^{n-1} \nabla v - \operatorname{div}(\alpha Q^{n-1} + S^n) v) \, dx \\ h^n|_{\Gamma} = \lambda^n. \end{cases}$$

Trouver $Q^n \in V^*$, tel que, pour tout $v \in V_0^*$,

$$(A2.4) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (\alpha Q^n v + K \nabla Q^n \nabla v) \, dx = \int_{\Omega} (-C^2 \nabla h^n \cdot v + (\alpha Q^{n-1} + S^n) \cdot v) \, dx, \\ Q^n|_{\Gamma^*} = q^n; \end{cases}$$

Dans (A2.4), on a posé :

$$(A2.5) \quad V^* = \{v = (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2; v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma, v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \partial v_1 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

et

$$(A2.6) \quad V_0^* = \{v \in V^*; v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma^*\}.$$

Le calcul de λ^n est fait de la même façon qu'au paragraphe 3.1.1 en remplaçant les espaces de fonctions tests pour les problèmes en débit par l'espace V_0^* défini par (A2.6).

De même pour la résolution du problème adjoint, on reprend les équations (58)-(65), en remplaçant les espaces de fonctions tests sur s et S par l'espace V_0^* .

Le calcul du gradient, repris à partir des calculs du paragraphe 3.2.4, donne :

$$(A2.7) \quad J'(q).p = + \sum_{n=1} \left\{ -a_2(s^n, y_p^n) + \int_{\Omega} (\alpha(s^{n+1} - S^{n+1}) y_p^n - \alpha(r^{n+1} - R^{n+1}) \operatorname{div} y_p^n) \, dx \right. \\ \left. + a_2(s^{n+1}, y_p^n) - \int_{\Omega} c^2 T^{n+1} \nabla \cdot (y_p^n) \, dx \right\},$$

pour tout $p = (p^n)_{n=1,N} \in (H^{1/2}(\Gamma^*))^N$, et y_p^n un relèvement dans V^* de p^n , pour $n = 1, N$.

Par rapport au cas de conditions aux limites de Dirichlet "pures", il convient de remplacer partout des fonctions tests sur la première composante des vecteurs de "type débit". Ceci impose de calculer et de stocker deux matrices de résolution pour le débit.

Annexe 3 Identification des conditions aux limites par l'intermédiaire de trois coefficients réels et de la composante temporelle.

On reprend les notations du paragraphe 5.2.2 et de l'annexe 2. On cherche donc à identifier la composante horizontale q des conditions aux limites sur le débit sous la forme.

$$(A3.1) \quad q = \begin{cases} q^+(t,y) = f^+(t) (a y^2 + by + c) \text{ sur } \Gamma^{*+}, \\ q^-(t,y) = f^-(t) (a y^2 + by + c) \text{ sur } \Gamma^{*-}, \end{cases}$$

Le problème d'identification s'écrit donc sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } A, B, C \in \mathfrak{R}^3, f = (f^+, f^-) \in (C^0([0,T]))^2, \text{ tels que :} \\ J(q) = J(A,B,C,f) \leq J(a,b,c,h), \\ \forall (a,b,c) \in \mathfrak{R}^3, h = (h^+, h^-) \in (C^0([0,T]))^2, \end{array} \right.$$

où la fonctionnelle J est définie par les équations (A2.2)-(A2.4).

Pour trouver l'expression du gradient de J par rapport aux différentes inconnues, à savoir (a,b,c) d'une part et f d'autre part, on utilise l'expression générale du gradient et l'expression des dérivées de q par rapport à ces mêmes inconnues.

Il vient :

$$(A3.2) \quad \frac{\partial q}{\partial a} = \begin{cases} f^+(t) y^2 \text{ sur } \Gamma^{*+}, \\ f^-(t) y^2 \text{ sur } \Gamma^{*-}, \end{cases}$$

$$(A3.3) \quad \frac{\partial q}{\partial b} = \begin{cases} f^+(t) y \text{ sur } \Gamma^{*+}, \\ f^-(t) y \text{ sur } \Gamma^{*-}, \end{cases}$$

$$(A3.4) \quad \frac{\partial q}{\partial c} = \begin{cases} f^+(t) \text{ sur } \Gamma^{*+}, \\ f^-(t) \text{ sur } \Gamma^{*-}, \end{cases}$$

$$(A3.5) \quad \frac{\partial q}{\partial f} = ay^2 + by + c \text{ sur } \Gamma^{*+} \cup \Gamma^{*-}.$$

Reprenons alors l'expression donnée en (A2.7) et décomposons ce gradient suivant les différentes inconnues :

$$J'(q).p = J'_A.a + J'_B.b + J'_C.c + J'_{f^+}.h^+ + J'_{f^-}.h^-,$$

où $p \in (H^{1/2}(\Gamma^*))^N$ s'écrit sous la forme :

$$p = \begin{cases} (h^+)_n (a y^2 + by + c), n = 1, N, \\ (h^-)_n (a y^2 + by + c), n = 1, N. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(A3.6) \quad \left\{ \begin{aligned} J'_A \in \mathfrak{R} &= \sum_{n=1}^N \{ -a_2(s^n, Y^n_{f,y^2}) - \int_{\Omega} (\alpha(s^{n+1} - S^{n+1}) Y^n_{f,y^2} \\ &\quad - \alpha(r^{n+1} - R^{n+1}) \operatorname{div} Y^n_{f,y^2}) dx \\ &\quad + a_2(s^n, Y^n_{f,y^2}) - \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot (Y^n_{f,y^2}) dx \}, \end{aligned} \right.$$

où $Y_{f,y}^n$ est un relèvement quelconque dans V^* de $(\frac{\partial q}{\partial a}, 0)$ donnée en (A3.2)

On obtient, de la même façon, l'expression de J'_B et J'_C en substituant dans (A3.6) $Y_{f,y}^n$ respectivement par $Y_{f,y}^n$ et Y_f^n relèvement dans V^* de $(\frac{\partial q}{\partial b}, 0)$ et $(\frac{\partial q}{\partial c}, 0)$ respectivement.

En ce qui concerne la composante temporelle, on obtient :

$$J'_{f^+} \cdot h^+ = \sum_{n=1}^N J'_{(f^+)^n} \cdot (h^+)^n$$

$$(A3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec } J'_{(f^+)^n} \cdot h^{+n} = -a_2(s^n, Y^n) + \int_{\Omega} \alpha(s^{n+1} - S^{n+1}) Y^n dx \\ - \int_{\Omega} \alpha(r^{n+1} - R^{n+1}) \operatorname{div} Y^n dx + a_2(S^{n+1}, Y^n) - \int_{\Omega} C^2 T^{n+1} \nabla \cdot (Y_f^n) dx \end{array} \right\},$$

où Y^n est un relèvement dans V^* de $((h^+)^n(a y^2 + by + c), 0)$.

On obtiendrait $J'_{f^-} \cdot h^-$ en prenant dans (A3.7), pour Y^n un relèvement dans V^* de $((h^-)^n(a y^2 + by + c), 0)$.

Le calcul du gradient ne demande donc pas de calculs supplémentaires, par rapport au cas linéaire, puisque dans le cas du problème discret l'évaluation des expressions de type (A3.6) et (A3.7) sont en fait des produits scalaires. Par contre, la recherche du paramètre optimal, (cf. Paragraphe 5.2.2) requiert la résolution de deux problèmes de type direct, à savoir la résolution des problèmes (D.1)-(D.6) avec pour conditions aux limites sur le débit respectivement :

$$(A3.8) \quad q^n = (d_f^n \cdot (a y^2 + by + c) + f^n \cdot (d_a y^2 + d_b y + d_c), 0)$$

et

$$(A3.9) \quad q^n = (d_f^n \cdot (d_a y^2 + d_b y + d_c), 0),$$

où on a écrit le vecteur de descente sous la forme :

$$\mathbf{d} = \begin{cases} d_a \\ d_b \\ d_c \\ (df^n)_{n=1,N} \end{cases}$$

On déduit successivement de ces deux calculs les valeurs des vecteurs $(qz \text{ et } (i))_{i=1, \text{Not}}$ et $(qzz \text{ et } (i))_{i=1, \text{Not}}$; les coefficients du polynôme dérivée de $P(\rho)$ (expression (91)) s'écrivent alors :

$$(A3.10) \quad P'(\rho) = -J'(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{d} + \rho J''(\mathbf{q})(\mathbf{d}, \mathbf{d}) - \rho^2/2 J^{(3)}(\mathbf{q}) d^{(3)} + \rho^2/6 J^{(4)}(\mathbf{q}) d^{(4)},$$

soit encore :

$$(A3.11) \quad \left\{ \begin{aligned} P'(\rho) = & \left(- \sum_{i=1}^{\text{Not}} qet(i) \cdot qzet(i) \right) + \rho \left(\sum_{i=1}^{\text{Not}} (2qet(i) \cdot qzzet(i) + (qzet(i))^2) \right) + \\ & - 3 \rho^2 \sum_{i=1}^{\text{Not}} qzzet(i) \cdot qzet(i) + 2 \rho^3 \sum_{i=1}^{\text{Not}} (qzzet(i))^2. \end{aligned} \right.$$

On cherchera alors la racine du polynôme $P'(\rho)$ qui rend le polynôme $P(\rho)$ minimal. On pourra alors évaluer le nouveau contrôle par :

$$q(i) = q(i) - \rho d(i), i = 1, Nnq ;$$

Par contre, le nouvel état ne peut être obtenu comme dans le cas linéaire, comme combinaison linéaire de l'ancien état et du vecteur $qzet$, (le passage de q à $qzet$ n'étant plus linéaire). Cette étape devra être remplacée par :

$$qet(i) = qet(i) - \rho qzet(i) + \rho^2 qzzet(i), i=1, \text{Not}.$$

